Problemas de Cálculo Vectorial

ERNESTO ARANDA PABLO PEDREGAL



SEPTEM EDICIONES

ERNESTO ARANDA PABLO PEDREGAL
Universidad de Castilla - La Mancha

Problemas de Cálculo Vectorial

Septem Ediciones

Título: *Problemas de Cálculo Vectorial*
1ª edición, febrero 2004

Cimadevilla 15, esc. A 1ºC
33003 OVIEDO (Asturias)
Tfno.: 985 208 512 • Fax: 985 208 513
e-mail: info@septemediciones.com
web: www.septemediciones.com

Colección: Septem Universitas
ISBN: 84-95687-52-6
Depósito Legal: AS-672/2004

Impreso en España – Printed in Spain

A María José y Olga

Prefacio

Posiblemente, una las principales razones por las que las asignaturas de matemáticas poseen una pobre aceptación entre los estudiantes de carreras científico-técnicas se deba a la dificultad que supone para muchos superarlas. Y este hecho puede ser consecuencia de la notable diferencia existente entre lo que el alumno lleva a cabo durante las horas lectivas y lo que se ve obligado a realizar en un examen, esto es, afrontar por sí mismo la resolución de problemas. Uno de los motivos generalmente aludidos por los estudiantes al respecto de que los ejercicios hechos en clase no son muy útiles a la hora de preparar exámenes es que, con frecuencia, el exceso de repetición conlleva a un aprendizaje memorístico de los mismos que resulta poco beneficioso para resolver de forma autónoma los problemas que suelen conformar los exámenes de matemáticas. De este modo el alumno se encuentra a veces con la frustrante sensación de haber realizado un considerable esfuerzo en el estudio de una asignatura de la que luego no obtiene resultados satisfactorios.

En estos casos, las opiniones habituales de los docentes coinciden en recomendar insistentemente a los estudiantes que se ejerciten en la resolución de problemas, sin repetir una y otra vez los ejemplos y ejercicios

ya resueltos. Esta labor no es fácil, pues cuando el alumno se dispone a realizarla suele encontrar una dificultad importante a la hora de iniciar los pasos que conducen a la resolución. Es en este momento cuando los problemas resueltos sirven como punto de referencia para facilitar esta labor. De algún modo, el alumno debe ser capaz de conjugar las ideas presentes en los resultados teóricos con los ejemplos realizados, para aplicarlas adecuadamente al nuevo problema. Sin embargo, este proceso carece de una metodología bien definida y sólo la experiencia parece conducir al objetivo deseado.

Con esta idea en mente hemos escrito este libro; para que sirva como ayuda al estudiante en la tarea, a veces complicada, de resolver ejercicios de matemáticas. Lo que el lector tiene en sus manos no pretende ser más que un manual para ejercitarse en la resolución de problemas de cálculo de funciones de varias variables, orientado a un primer curso de carreras científico-técnicas. Nuestra intención ha sido recopilar una cantidad suficiente de problemas con soluciones para, por una parte, evitar que el alumno repita innecesariamente ejercicios, y por otra, poder contrastar sus resultados con las soluciones dadas. Para facilitar su uso hemos incluimos también un buen número de ejercicios completamente resueltos que esperamos sirvan a la vez como orientación y referencia para abordar el resto de problemas.

Los contenidos que comprenden los ejercicios que exponemos aquí corresponden a un curso típico de iniciación en el cálculo de funciones de varias variables: derivación parcial, integración múltiple, integrales de línea y superficie y los teoremas clásicos del cálculo vectorial, con un enfoque definitivamente no analítico. Hemos incluido también un primer capítulo destinado a repasar aspectos de geometría del plano y del espacio, que constituyen el entorno básico a partir del cual el cálculo vectorial encuentra una referencia visual siempre útil, y hemos tratado de ilustrar gráficamente buena parte de los ejercicios. Por otra parte, la cuestiones técnicas y abstractas han sido dejadas de lado para centrarnos en los aspectos del cálculo formal, con el fin de inculcar una adecuada y necesaria soltura operacional que sirva como base para afrontar otras asignaturas científicas o tecnológicas donde tales habilidades son bien apreciadas.

Ciudad Real, 25 de febrero de 2004.

Índice general

CAPÍTULO 1

Geometría de las funciones de varias variables

En este primer capítulo nos centraremos en ejercicios preliminares de gran utilidad para afrontar adecuadamente el cálculo de funciones de varias variables. Tanto los ejemplos como los ejercicios que esencialmente aparecen en el estudio de estas funciones suelen estar referidos al plano o al espacio, es decir, se trata con funciones de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Los motivos son simples: en primer lugar, no hay una diferencia substancial entre lo que ocurre para estas funciones y las funciones definidas en espacios de dimensión superior, mientras que por otro lado, en estos espacios podemos tener una representación gráfica de estas funciones que ayuda a aclarar conceptos y facilita su comprensión. De este modo, los ejercicios de este primer tema están dedicados a repasar cuestiones relativas a geometría elemental del plano y del espacio, a tratar con algunos objetos como las cónicas y las cuádricas, que suelen aparecer como los ejemplos más típicos de objetos bidimensionales y tridimensionales, respectivamente, y a introducir el uso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas, que serán usadas con frecuencia en muchos otros ejercicios. La intención es refrescar al lector el uso de estas herramientas básicas con las que poder moverse sin dificultad en este contexto.

Sección 1.1

Repaso de geometría del plano y el espacio

Determinar si las siguientes ternas de puntos están o no alineadas:

1 $(1,1)$, $(2,4)$, $(-1,-2)$.

2 $(4,0)$, $(0,1)$, $(12,-2)$.

3 $(3,-1)$, $(1,0)$, $(-3,2)$.

4 $(0,0)$, $(3,2)$, $(1,5)$.

Solución:

2 Tres puntos están alineados si los vectores que los unen son colineales. De este modo construimos dos vectores que unan los puntos: $\mathbf{u}_1 = (4,0) - (0,1) = (4,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (12,-2) - (0,1) = (12,-3)$. Para ver si son colineales se comprueba si el determinante formado por estos dos vectores es o no nulo. Dicho determinante vale 0, por lo que los puntos están alineados.

4 Puesto que uno de los puntos es el origen, basta comprobar si los vectores $(3,2)$ y $(1,5)$ son colineales. El determinante formado por estos dos vectores vale 13, por lo tanto los puntos dados no están alineados.

Encontrar la ecuación de la recta perpendicular al vector $\mathbf{v}$ *y que pasa por el punto* P *en los casos:*

5 $\mathbf{v} = (1,-1)$, $P = (-5,3)$.

6 $\mathbf{v} = (-5,4)$, $P = (3,2)$.

7 $\mathbf{v} = (0,1)$, $P = (0,3)$.

8 $\mathbf{v} = (2,3)$, $P = (-1,-1)$.

Solución 7:

En general sabemos, y es sencillo comprobar, que la recta que es perpendicular al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ es la recta de ecuación

$$v_1(x - p_1) + v_2(y - p_2) = 0.$$

En este caso concreto obtenemos la recta $y = 3$.

¿Cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares?

9 $2x - 5y = 1$, $2x + y = 2$.

10 $3x - 5y = 1$, $5x + 3y = 7$.

11 $-x + y = 2$, $x + y = 9$.

12 $x + 2y = 5$, $y = 3 + 2x$.

Solución 10:

El criterio de perpendicularidad entre rectas se reduce a comprobar si sus vectores directores, o equivalentemente sus vectores normales, son perpendiculares. Esto sucede cuando el producto escalar de tales vectores es nulo. Puesto que para una recta de ecuación

$$ax + by + c = 0$$

un vector normal viene dado por (a, b), es fácil ver que en este ejemplo concreto tenemos

$$(3, -5) \cdot (5, 3) = 0,$$

y por tanto las dos rectas son perpendiculares.

Encontrar las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por los pares de puntos dados:

13 $(1, 1, -1)$, $(-2, 1, 3)$.

14 $(-1, 5, 2)$, $(3, -4, 1)$.

15 $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$.

16 $(-1, 0, 3)$, $(0, 1, 2)$.

Solución 13:

En general, la recta del espacio que pasa por dos puntos dados $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ viene dada en forma paramétrica por

$$x = tp_1 + (1 - t)q_1,$$
$$y = tp_2 + (1 - t)q_2,$$

$$z = tp_3 + (1-t)q_3,$$

donde t es un parámetro que se mueve en la recta real. En este ejemplo concreto, las ecuaciones paramétricas de la recta quedan

$$x = 3t - 2, \quad y = 1, \quad z = 3 - 4t.$$

Encontrar la ecuación vectorial de las rectas

17 *de ecuaciones paramétricas:* $x = -t$, $y = 1 + \sqrt{2}t$, $z = 6 - 8t$.

18 *que pasa por los puntos* $P = (0,0,0)$, $Q = (1,2,3)$.

19 *donde se intersecan los planos* $3x + y - 4z = 0$, $5x + z = 2$.

Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{n}$ *que pasa por el punto* P *en los siguientes casos:*

20 $\mathbf{n} = (1,-1,3)$, $P = (4,2,-1)$.

21 $\mathbf{n} = (-1,0,5)$, $P = (2,3,7)$.

22 $\mathbf{n} = (1,0,0)$, $P = (2,1,1)$.

23 $\mathbf{n} = (0,2,3)$, $P = (3,4,5)$.

24 $\mathbf{n} = (3,2,6)$, $P = (2,-1,0)$.

25 $\mathbf{n} = (0,0,1)$, $P = (1,3,-2)$.

Solución 25:

La ecuación del plano perpendicular a un vector dado de coordenadas $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ que pasa por un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ tiene por ecuación

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

En este caso concreto la ecuación es $z + 2 = 0$.

Determinar un punto P *por el que pase el plano dado y un vector* $\mathbf{n}$ *perpendicular al mismo, en los siguientes casos:*

26 $3x + z = 3.$

27 $x - y - z = 5.$

28 $y = 0.$

29 $2x + y - z = 1.$

Encontrar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados:

30 $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$.

31 $(-5, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$.

32 $(2, 1, 0)$, $(0, 0, 7)$, $(2, 1, 1)$.

33 $(1, 3, 0)$, $(-5, -3, -1)$, $(-2, 0, 1)$.

Solución 32:

Directamente se puede escribir la ecuación del plano que pasa por tres puntos dados

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3),$$

mediante el determinante

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En nuestro caso, la ecuación queda

$$\begin{vmatrix} x - 2 & -2 & 0 \\ y - 1 & -1 & 0 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir $x - 2y = 0$.

34 *Encontrar la ecuación del plano que contiene a las rectas paralelas:*

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}, \qquad \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}.$$

Encontrar un vector que sea perpendicular a los pares de vectores dados:

35 $(1,2,-3)$, $(2,-1,3)$.

36 $(0,1,0)$, $(1,0,0)$.

37 $(1,1,1)$, $(0,-1,2)$.

38 $(6,-6,2)$, $(1,3,-1)$.

Solución 35:

En el espacio, un vector perpendicular a dos dados se puede obtener rápidamente a través del producto vectorial, pues dados dos vectores linealmente independientes $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ siempre es un vector ortogonal a ambos. Dicho producto vectorial se calcula mediante el determinante simbólico

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

que representa un vector cuyas componentes son los adjuntos de la primera fila.

En consecuencia, el vector pedido en este ejercicio es

$$(1,2,-3) \times (2,-1,3) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right),$$

luego el vector solicitado es $(3,-9,-5)$ que, efectivamente es ortogonal a los dos vectores iniciales.

Encontrar un vector paralelo a la recta intersección de los pares de planos siguientes:

39 $2x - y + z = 1$, $3x + y + z = 2$.

40 $x - y = 1$, $y + z = 4$.

41 $4x - y = 0$, $x + 4y + z = 5$.

Solución 40:

El vector director de la recta determinada como intersección de dos planos es precisamente un vector ortogonal a los dos vectores normales a los dos planos. Además sabemos que un vector normal

a un plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es el vector (a, b, c). Por tanto este problema es similar a los Ejercicios **35–38**, en los que se pide un vector ortogonal a dos dados. El producto vectorial proporciona la respuesta de manera directa. En este caso concreto se obtiene

$$(1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1).$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(-1, 2, 3)$ *y es:*

42 *paralelo al plano* XY*,*

43 *perpendicular al eje* X*,*

44 *perpendicular al eje* Y*.*

Solución 44:

Al buscar un plano perpendicular al eje Y, estamos aportando el dato del vector normal al plano que debe ser precisamente el eje Y, $(0, 1, 0)$ (véanse los Ejercicios **26–29**). En consecuencia la ecuación del plano solicitado será

$$0(x + 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0,$$

es decir, $y = 2$.

45 *Consideremos los puntos* $P = (1, 3, -2)$ *y* $Q = (1, -1, 2)$ *y el vector* $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$*. Encontrar el punto de intersección de la recta que pasa por* P *con dirección* $\mathbf{n}$ *y el plano que pasa por* Q *perpendicular a* $\mathbf{n}$*.*

Solución 45:

Un punto genérico de la recta que pasa por P y tiene vector director $\mathbf{n}$ es, en forma paramétrica, $X = P + t\mathbf{n}$. Mientras que la ecuación del plano perpendicular a $\mathbf{n}$ que pasa por Q es $\mathbf{n} \cdot (X - Q) = 0$, donde hemos usado la notación vectorial $X = (x, y, z)$. Luego si buscamos el punto intersección tendremos que resolver

$$\mathbf{n} \cdot (P + t\mathbf{n} - Q) = 0,$$

de donde despejamos el valor del parámetro t para obtener

$$t = \frac{\mathbf{n} \cdot (Q - P)}{|\mathbf{n}|^2},$$

y el punto buscado será

$$P + \frac{\mathbf{n} \cdot (Q - P)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

En el caso concreto que nos ocupa, resulta que $\mathbf{n} \cdot (Q - P)$ se anula y consecuentemente el punto solicitado es el mismo P.

Encontrar el punto de corte de los planos siguientes con los ejes coordenados.

46 $x + y + z = 1$.

47 $x + y = 1$.

48 $-x + 3y + 3z = -3$.

49 $2y + z = 0$.

Solución 48:

Los puntos de corte de un cierto plano con los tres ejes coordenados se obtienen anulando dos de las coordenadas, por turno, y despejando la tercera de la propia ecuación del plano. Así, si el plano tiene ecuación $-x + 3y + 3z = -3$ los puntos de corte serán:

- Con el eje X: $y = z = 0$, $-x = -3$, y el punto resulta ser el $(3, 0, 0)$.
- Con el eje Y: $x = z = 0$, $3y = -3$, y el punto de intersección es $(0, -1, 0)$.
- Con el eje Z: $x = y = 0$, $3z = -3$, y el punto es $(0, 0, -1)$.

Determinar el paralelismo o perpendicularidad de los siguientes pares de planos.

50 $x - 3y + 2z = 4$, $-2x + 6y - 4z = 0$.

51 $4x + 3y - z = 6$, $x + y + 7z = 4$.

52 *Encontrar la distancia entre el punto* $(1, 1, 2)$ *y el plano de ecuación* $3x + y - 5z = 2$.

53 *Dos caras de un cubo se encuentran en los planos* $3x - y + 2z = 5$, $3x - y + 2z = 7$. *Calcular el volumen del cubo.*

Solución 53:

Si dos caras de un cubo se encuentran en dos planos paralelos de ecuación

$$\mathbf{n} \cdot (X - P) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (X - Q) = 0,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a ambos, P y Q son dos puntos concretos de ambos planos, respectivamente, y $X = (x, y, z)$ es el vector de variables, el lado del cubo tendrá que ser necesariamente la distancia entre ambos planos. Esta distancia es además la distancia de un punto de uno de los planos al otro plano. Tal fórmula de la distancia es

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot (P - Q)|}{|\mathbf{n}|}.$$

Por lo tanto el volumen del cubo pedido será el cubo del valor anterior

$$\left(\frac{|\mathbf{n} \cdot (P - Q)|}{|\mathbf{n}|} \right)^3.$$

En nuestro caso concreto

$$\mathbf{n} = (3, -1, 2), \quad P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, -2, 1),$$

y por lo tanto el volumen, aplicando la fórmula anterior, es $\frac{4}{7\sqrt{14}}$.

54 *Encontrar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los puntos* $A = (-1, 5, 3)$ *y* $B = (6, 2, -2)$.

Solución 54:

Es fácil caer en la cuenta de que el lugar geométrico solicitado es exactamente el plano perpendicular al vector $B - A$ que pasa por el punto medio $\frac{1}{2}(A + B)$ (el plano mediatriz). Una vez entendida

la afirmación anterior es muy sencillo comprobar que la ecuación de tal plano es $14x - 6y - 10z = 9$.

Dibujar los siguientes conjuntos del plano y del espacio:

55 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ \log x \leq y\}$.

56 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y < e^x\}$.

57 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$.

58 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

59 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0\}$.

60 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

61 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - 1| + |y - 1| < 2\}$.

62 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \leq 4\}$.

63 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$.

64 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ xy = 1\}$.

65 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \operatorname{sen} y\}$.

Solución:

57 En la desigualdad $x^2 - 2x + y^2 \leq 3$, podemos completar cuadrados del siguiente modo:

$$x^2 - 2x + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2 + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 4.$$

Si prestamos atención a la expresión anterior con igualdad, debemos distinguir la ecuación de una circunferencia[1] de centro el punto $(1, 0)$ y radio 2. Para estudiar la desigualdad observamos que ésta corresponde a los puntos interiores de la misma, luego el conjunto pedido resulta ser el círculo (incluida la frontera) de centro $(1, 0)$ y radio 2.

[1] Recuérdese que la ecuación de una circunferencia de centro (a, b) y radio r se escribe como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

59 No es difícil observar que la condición

$$(4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0$$

se desglosa en dos posibilidades. La primera corresponde a

$$4x - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0,$$

y la segunda a

$$4x - x^2 - y^2 \leq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \geq 0.$$

Después de usar la técnica de completar cuadrados, estas dos posibilidades se pueden reinterpretar como

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 1,$$

y

$$(x - 2)^2 + y^2 \geq 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 \geq 1,$$

respectivamente. El primer caso corresponde a la intersección de los dos círculos centrados, respectivamente, en $(2, 0)$ y radio 2, y en $(1, 0)$ y radio 1. Mientras que la segunda posibilidad es precisamente la intersección de los exteriores de esos mismos círculos (véase la Figura 1). La unión de ambas regiones es el conjunto del plano pedido.

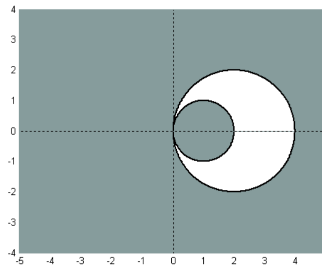


Figura 1. Ejercicio **59**: región $(4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0$

61 Para entender el conjunto de puntos del plano que satisfacen la condición

$$|x-1|+|y-1|<2,$$

es buena estrategia intentar determinar su frontera que corresponde a la condición

$$|x-1|+|y-1|=2.$$

Es también claro que esta ecuación representa la traslación de vector $(1,1)$ de la región de ecuación

$$|x|+|y|=2.$$

Como en esta ecuación interviene el valor absoluto para las dos variables x e y, lo más sencillo consiste en analizar dicha ecuación en los cuatro cuadrantes, obteniendo el siguiente resultado:

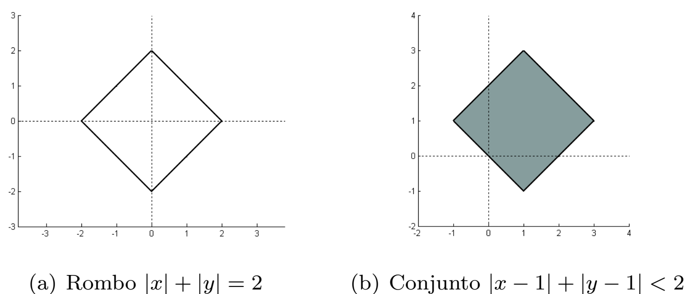
- Primer cuadrante: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y=2$.
- Segundo cuadrante: $x \leq 0$, $y \geq 0$, $-x+y=2$.
- Tercer cuadrante: $x \leq 0$, $y \leq 0$, $-x-y=2$.
- Cuarto cuadrante: $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x-y=2$.

Si representamos estas cuatro rectas en cada cuadrante obtenemos el rombo de la Figura 2(a). La desigualdad

$$|x|+|y|<2$$

corresponderá al interior del rombo o al exterior (en todo caso sin su frontera). Es fácil ver que se trata del interior pues el origen $(0,0)$ verifica la desigualdad anterior. En definitiva, la región solicitada inicialmente es el rombo sólido centrado en el $(1,1)$ trasladado del rombo anterior (véase la Figura 2(b)).

64 En el plano, la ecuación $xy=1$ representa las dos ramas de la bien conocida hipérbola equilátera $y=\frac{1}{x}$. ¿Qué sucede cuando esta misma ecuación la consideramos en el espacio? Como la ecuación no hace referencia a la tercera variable z, cualquier punto (x,y,z) tal que $xy=1$ pertenecerá a



(a) Rombo $|x| + |y| = 2$ (b) Conjunto $|x-1| + |y-1| < 2$

Figura 2. Ejercicio **61**

esa región. Gráficamente esto se consigue "desplazando" la hipérbola $xy = 1$ dibujada en el plano $z = 0$ paralelamente, hacia arriba y hacia abajo, al eje Z (ver Figura 3).

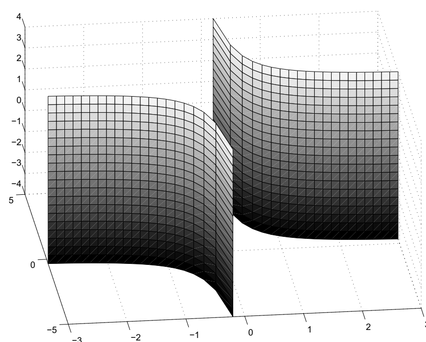


Figura 3. Ejercicio **64**: $xy = 1$ en $\mathbb{R}^3$

Sección 1.2

Cónicas y cuádricas

Esbozar la gráfica de las siguientes cónicas y señalar sus elementos:

66 $x^2 + 9y^2 = 36$.

67 $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

68 $3x^2 - 6x + y = 7$.

69 $x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1$.

70 $x^2 + xy + y^2 = 4$.

71 $\frac{19}{4}x^2 + \frac{43}{12}y^2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}xy = 48$.

72 $3x^2 = 2 + y^2$.

73 $xy = 2$.

74 $x^2 + 2x - 6y - 17 = 0$.

75 $x^2 - xy + y^2 = 2$.

76 $9x^2 - 24xy + 2y^2 = 0$.

77 $3x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{6}{\sqrt{2}}x - \frac{6}{\sqrt{2}}y = 8$.

Solución:

68 Al tratarse de una ecuación sin término cruzado xy la simple completación del cuadrado nos permite identificar la cónica en cuestión. En este caso

$$3x^2 - 6x + y = 7 \text{ se escribe como } 3(x-1)^2 = -(y-10).$$

Se trata de la parábola[2] de vértice $(1, 10)$ y eje principal $x = 1$, con foco $(1, \frac{119}{12})$ y directriz $y = \frac{121}{12}$ (véase Figura 4(a)).

69 Al igual que el apartado anterior, completando cuadrados,

$$x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1 \text{ se escribe } (x+1)^2 - (y+1)^2 = 1,$$

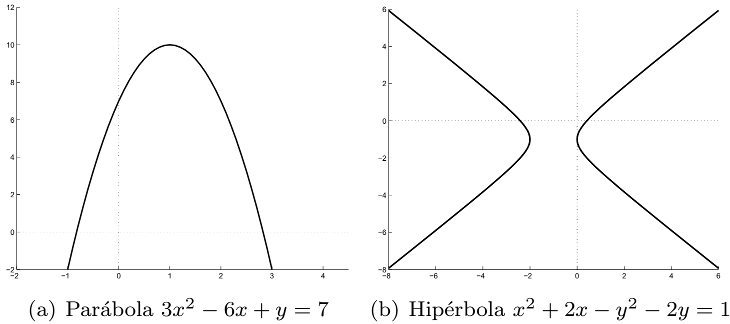
que corresponde a la hipérbola[3] de eje principal $y = -1$ y centro $(-1, -1)$. Los vértices se encuentran en los puntos $(0, -1)$ y $(-2, -1)$ (Figura 4(b)).

77 En este caso tenemos un término en xy que nos obliga a realizar una rotación para poder identificar la cónica. Para ello procedemos del siguiente modo. El ángulo de rotación α viene determinado por

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \quad \text{si } A \neq C$$

[2]La ecuación $y = ax^2$ representa a una parábola de vértice en el origen, eje Y, foco en $(0, c)$, con $c = \frac{1}{4a}$ y directriz la recta $y = -c$. Una traslación a vértice (x_0, y_0) proporciona la ecuación $y - y_0 = a(x - x_0)^2$.

[3]La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ corresponde a una hipérbola de centro el origen y eje principal Y (X, respectivamente). Una traslación a centro (x_0, y_0) da lugar a la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$.



(a) Parábola $3x^2 - 6x + y = 7$ (b) Hipérbola $x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1$

Figura 4. Cónicas de los Ejercicios **68** y **69**

donde B es el coeficiente del término xy y A y C los coeficientes de x^2 e y^2, respectivamente. Si $A = C$ entonces $\alpha = \frac{\pi}{4}$, como es nuestro caso. La rotación viene dada por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

En este caso, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$. Sustituyendo en la ecuación,

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{6}{\sqrt{2}}x - \frac{6}{\sqrt{2}}y = 8 \Rightarrow X^2 + 2Y^2 - 3X = 4$$

y completando cuadrados,

$$(X - \frac{3}{2})^2 + 2Y^2 = \frac{25}{4}$$

Es decir, la ecuación girada corresponde a una elipse[4] de centro $(\frac{3}{2}, 0)$ y ejes $x = \frac{3}{2}$ e $y = 0$ (representada en línea discontinua en la Figura 5). La ecuación original representará a una elipse de centro $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$ y ejes $y = x$ y $x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, calculados según las ecuaciones de la rotación dada.

[4] La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa una elipse de centro el origen, ejes X e Y, con semiejes a y b. La traslación a centro (x_0, y_0) da la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

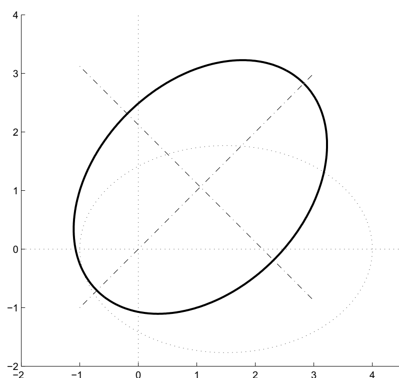


Figura 5. Ejercicio **77**: elipse rotada

Encontrar la ecuación de las parábolas con el foco y directriz siguientes:

78 $F = (0, 4)$, $y = -4$.

79 $F = (4, 0)$, $x = -3$.

80 $F = (3, 1)$, $x = 1$.

81 $F = (0, 0)$, $y = -2$.

Solución 80:

La parábola puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo (el foco) y una recta fija (la directriz) es constante. De este modo, la parábola en este caso vendrá definida por la ecuación:

$$\operatorname{dist}\left((x, y), (3, 1)\right) = \operatorname{dist}\left((x, y), x = 1\right).$$

Luego,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = x - 1.$$

Un sencillo cálculo proporciona la ecuación $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$, que mediante completación de cuadrados da

$$(y-1)^2 = 4(x-2),$$

que corresponde a la parábola de vértice $(2, 1)$ y eje $y = 1$.

82 *Encontrar la ecuación de cada parábola que tiene vértice en el origen, y su foco coincide con los de la elipse* $169x^2 + 25y^2 = \frac{169}{4}$.

83 *Encontrar la ecuación del círculo que pasa a través del foco de la parábola* $x^2 + 8y = 0$ *y los focos de la elipse* $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

Solución 83: Según la nota 2 de la pág. 26, el foco de esta parábola es $(0, -2)$. En el caso de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ centrada en el origen, los focos están en los puntos $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (si $a > b$) o en los puntos $(0, \pm c)$, para $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ (si $a < b$). Un simple cálculo nos muestra que $a = 5$ y $b = 4$, de modo que los focos están en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Por último, para encontrar la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos, teniendo en cuenta que su centro debe estar a la misma distancia de éstos puntos, debe ocurrir que el centro se encuentre en el punto de intersección entre las mediatrices de cada par de puntos.

Un simple cálculo muestra que la mediatriz entre $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ es $x = 0$, mientras que la mediatriz entre $(3, 0)$ y $(0, -2)$ es $3x + 2y = \frac{5}{2}$. La intersección es $(0, \frac{5}{4})$. Calculando la distancia entre este punto y cualquiera de los otros tres nos da un radio igual a $\frac{13}{4}$. El círculo tiene por ecuación $2x^2 + 2y^2 - 5y - 18 = 0$ (véase la nota 1 de la pág. 22) .

84 *Probar que si* $m \neq 0$, *la recta de ecuación* $y = mx + \frac{c}{m}$ *es tangente a la parábola* $y^2 = 4cx$.

85 *Mostrar que la ecuación de la tangente a la parábola* $y^2 = 4cx$ *en el punto* (x_0, y_0) *tiene por ecuación*

$$y_0 y = 2c(x + x_0).$$

Solución 85:

La condición de tangencia se puede expresar imponiendo que la ecuación que representa la intersección de ambas tenga una raíz doble en el punto de tangencia. En este caso

$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 4cx \\ y_0 y = 2c(x + x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 y = \frac{y^2}{2} + 2cx_0,$$

cuyas raíces son

$$y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4cx_0}.$$

Teniendo en cuenta que (x_0, y_0) es el punto de tangencia, y por tanto pertenece a la parábola, se concluye el resultado.

86 *Probar que la tangente a una elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *en* (x_0, y_0) *tiene por ecuación*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

87 *Probar que la elipse* $x^2 + 2y^2 = 16$ *y la hipérbola* $x^2 - y^2 = 4$ *se cortan formando ángulo recto.*

88 *La tangente en* P *a una hipérbola interseca a sus asíntotas en los puntos* Q *y* R*. Probar que entonces* P *es el punto medio de* QR*.*

89 *Supongamos que la tangente a una parábola en un punto* P *interseca a la recta directriz en el punto* Q*. Si* F *es el foco de la parábola, demostrar que* FQ *es perpendicular a* FP*.*

90 *Un disco parabólico de 10 m. de diámetro y 5 m. de profundidad es usado como radiotelescopio. ¿Dónde debe estar colocado el receptor?*

91 *Supongamos que un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados se encuentra inscrito en una elipse de ecuación* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*. ¿Donde habrán de situarse los vértices para que el rectángulo tenga área máxima?*

Identificar las siguientes cuádricas.

92 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$

93 $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1.$

94 $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1.$

95 $x^2 + 2y^2 - z = 0.$

96 $x^2 - z^2 = 0$.

97 $x^2 + 4y^2 = 100$.

98 $x^2 + y^2 + z + 4 = 0$.

99 $4x = y^2 - 2z^2$.

100 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4y + 2z = 0$.

101 $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x - 4y = 0$.

102 $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$.

103 $4x^2 - y^2 + z^2 + 8x + 8z = -24$.

104 $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

105 $yz = 1$.

106 $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 8x - 4y - 8z = -8$.

107 $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x + 9y - 8z = -10$.

108 $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 4y = 0$.

109 $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$.

Solución:

106 La técnica de completación de cuadrados da lugar a la ecuación

$$4(x+1)^2 + (y-2)^2 + 4(z-1)^2 = 4,$$

que corresponde a un elipsoide[5] de centro $(-1, 2, 1)$, con secciones Y circulares.

108 La simplificación de la ecuación mediante la completación de cuadrados proporciona

$$(x-2)^2 - (y+2)^2 - z^2 = 0,$$

que representa un cono[6] circular de eje $y = -2$, $z = 0$ (paralelo a X), de vértice $(2, -2, 0)$.

---

[5] La ecuación de un elipsoide de centro el origen y semiejes a, b y c es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

[6] La ecuación de un cono de vértice el origen y eje Z es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

110 *Probar que la intersección entre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $z = 1$ es un círculo.*

111 *Probar que la proyección en el plano XY de la intersección entre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $2z = y + 1$ es una elipse.*

Solución 111:

Como sabemos, la intersección de dos curvas corresponde al conjunto de puntos que satisface ambas ecuaciones. Por otro lado, la proyección de un punto (x, y, z) sobre el plano XY es el punto $(x, y, 0)$. Es decir, dicha proyección se calcula haciendo "desaparecer" la coordenada z. Así, la ecuación de la proyección se obtiene despejando z de ambas ecuaciones e igualando. Esto es,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(y + 1)^2,$$

que puede escribirse como la elipse $x^2 + \frac{3}{4}(y - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$.

112 *Probar que la proyección en el plano XY de la intersección del plano $z = 2y$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es un círculo.*

113 *Probar que la proyección en el plano XZ de la intersección de los paraboloides $y = 2x^2 + 3z^2$ e $y = 5 - 3x^2 - 2z^2$ es un círculo.*

Sección 1.3

Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Convertir las siguientes coordenadas de cartesianas a polares:

114 $(0, 3)$.

115 $(\sqrt{3}, 1)$.

116 $(-1, \sqrt{3})$.

117 $(-2, -2)$.

Solución 116:

Las fórmulas del cambio son bien conocidas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x}),$$

donde hay que tener en cuenta la ambigüedad que supone esta arcotangente. De este modo si $x = -1$ e $y = \sqrt{3}$, tendremos

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \quad \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Convertir las siguientes coordenadas de polares a cartesianas:

118 $(1, \frac{\pi}{4})$.

119 $(2, \frac{\pi}{3})$.

120 $(1, -\frac{\pi}{3})$.

121 $(3, \frac{3\pi}{2})$.

Solución 121:

Las fórmulas del cambio de polares a cartesianas son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

En este caso concreto, tendremos

$$x = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -3.$$

Convertir las siguientes coordenadas cartesianas a cilíndricas:

122 $(1, -1, 0)$.

123 $(-\sqrt{3}, -1, 1)$.

124 $(6, 0, -2)$.

125 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

126 $(0, 6, -2)$.

127 $(-1, 0, 3)$.

Solución 123:

Las fórmulas del cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas son

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x}), \quad z = z,$$

por tanto, en este ejemplo concreto tendremos

$$r = 2, \quad \theta = \frac{7\pi}{6}, \quad z = 1.$$

Convertir las siguientes coordenadas cilíndricas a cartesianas:

128 $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

129 $(1, \frac{\pi}{6}, 4)$.

130 $(0, \frac{\pi}{18}, 6)$.

131 $(3, \frac{\pi}{4}, 8)$.

132 $(2, -\frac{\pi}{4}, 3)$.

133 $(2, \pi, 3)$.

Solución 132:

Las fórmulas del cambio de cilíndricas a cartesianas son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z.$$

En este caso concreto

$$x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2}, \quad z = 3.$$

Convertir las siguientes coordenadas cartesianas a esféricas:

134 $(0, 1, 1)$.

135 $(0, 0, -2)$.

136 $(1, 1, 1)$.

137 $(1, 0, 1)$.

Solución 136:

El cambio de coordenadas cartesianas a esféricas se lleva a cabo mediante las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

En este caso concreto se obtiene

$$\rho = \sqrt{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Convertir las siguientes coordenadas esféricas a cartesianas:

138 $(3, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

139 $(8, \frac{\pi}{6}, \pi)$.

140 $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

141 $(2, \frac{\pi}{3}, 0)$.

Solución 139:

En este caso las fórmulas del cambio son

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Luego, obtenemos

$$x = 8\cos(\frac{\pi}{6}) \operatorname{sen}\pi = 0, \; y = 8\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) \operatorname{sen}\pi = 0, \; z = 8\cos\pi = -8.$$

Encontrar la ecuación polar de las curvas siguientes

142 $x^2 + y^2 = 25$.

143 $y^2(2a - x) = x^3$, $a > 0$.

144 $x^2 - y^2 = 1$.

145 $y^2 = x$.

146 $xy = 1$.

147 $x + y = 4$.

Solución 143:

Para encontrar la ecuación polar de una curva dada en coordenadas cartesianas no hay más que introducir las fórmulas del cambio en la ecuación de la curva, simplificar cuando sea posible, e intentar dar r en función de θ teniendo en cuenta las restricciones que debemos imponer para que el radio r sea no negativo. En concreto, tenemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2\theta(2a - r\cos\theta) = r^3\cos^3\theta.$$

Después de unas cuantas manipulaciones y simplificaciones, y notando que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se llega a

$$r = \frac{2a\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}.$$

Puesto que $r \geq 0$, debemos exigir que $\cos\theta > 0$. Esta condición se da cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de las siguientes expresiones polares:

148 $r = 3$.

149 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

150 $r^2 = |\cos(2\theta)|$.

151 $r = 3\sec\theta$.

Solución 150:

Si multiplicamos la ecuación por r^2 y notamos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, llegamos a

$$r^4 = \left|r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta\right|,$$

de modo que

$$(x^2 + y^2)^2 = \left|x^2 - y^2\right|.$$

Encontrar los puntos de intersección de los pares de curvas siguientes, expresadas en coordenadas polares:

152 $r = 2$, $r = \cos\theta$.

153 $r = \operatorname{sen}\theta$, $r^2 = 3\cos^2\theta$.

Solución 153:

Si elevamos al cuadrado la primera ecuación e igualamos las dos expresiones para r^2 se obtiene la ecuación

$$3\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta,$$

cuyas soluciones deben satisfacer

$$\arctan\theta = \pm\sqrt{3},$$

es decir, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. No obstante, observamos que los ángulos $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ dan un valor negativo para el seno, y en consecuencia para r en la primera ecuación. Como esto no es posible debemos descartar estos dos valores. Los puntos de intersección serán por tanto los correspondientes a $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, es decir,

$$(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}), \quad (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}).$$

Esbozar las curvas cuya ecuación en coordenadas polares es:

154 $r = a^2|\cos(2\theta)|$.

155 $r = a(1+\cos\theta)$.

156 $r = 2+\cos\theta$.

157 $r = a|\cos(2\theta)|$.

158 $r = a|\operatorname{sen}(3\theta)|$.

159 $r = e^{\theta/2}$.

160 $r\theta = a$.

161 $r = a|\cos(3\theta)|$.

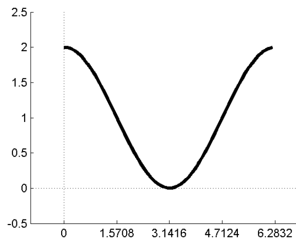
162 $r = a|\operatorname{sen}(2\theta)|$.

163 $r = 2a\operatorname{sen}\theta\tan\theta$.

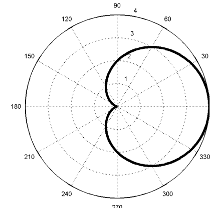
164 $r^2 = a^2\cos\theta$.

Solución 155:

La técnica seguida para representar curvas en polares consiste en analizar la variación del radio vector r en función del ángulo θ. Por ejemplo, para la ecuación $r = a(1+\cos\theta)$ para $a = 1$ observamos que la función en el plano (r,θ) definida por tal ecuación viene representada en la Figura 6(a). Vemos por tanto que para el ángulo $\theta = 0$ estamos a distancia $r = 2$, luego la curva parte del punto $(2,0)$ (Figura 6(b)). A medida que θ evoluciona hasta $\frac{\pi}{2}$, el radio vector disminuye hasta distancia 1 (luego alcanzará el punto $(0,1)$), y posteriormente a $r = 0$ para $\theta = \pi$ (llegando por tanto al origen). A partir de aquí repite el mismo proceso en la dirección opuesta (el radio vector crece desde $r = 0$ a $r = 2$ a medida que θ se mueve entre π y 2π).



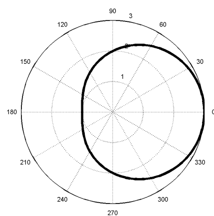
(a) $y = 1+\cos x$



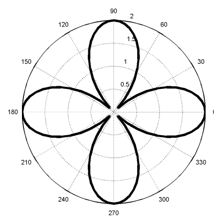
(b) $r = 1+\cos\theta$

Figura 6. Representación de curvas en polares

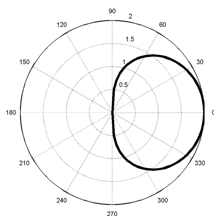
La Figura 7 muestra otras curvas en polares.



(a) **156**



(b) **157**



(c) **164**

Figura 7. Curvas en polares de los Ejercicios **156**, **157** y **164**

165 *Una superficie está descrita en coordenadas cilíndricas por la ecuación* $3r^2 = z^2 + 1$. *Convertir a coordenadas cartesianas y dibujar.*

166 *Escribe la ecuación de la esfera unitaria en coordenadas cilíndricas.*

167 *Escribe la ecuación del cilindro circular recto* $x^2 + y^2 = 9$ *en coordenadas esféricas.*

Describir los conjuntos del espacio dados por las siguientes ecuaciones expresadas en las coordenadas indicadas:

168 *(cilíndricas)* $r = 1 + \cos\theta$.

169 *(cilíndricas)* $z = \theta$.

170 *(esféricas)* $\rho = \phi$.

171 *(esféricas)* $\rho = 1$, $\theta = 0$.

Expresar los siguientes conjuntos en las coordenadas solicitadas:

172 *El conjunto limitado por las rectas* $y = x$, $y = -x$ *y* $x = 1$ *en coordenadas polares.*

173 *El conjunto limitado por la circunferencia* $x^2 + y^2 = 2$ *y las rectas* $y = x$ *e* $y = 0$, *en coordenadas polares.*

174 *El plano* $z = x$ *en coordenadas cilíndricas y esféricas.*

175 *El cono* $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ *en coordenadas cilíndricas.*

176 *La superficie* $z = x^2 + y^2$ *en coordenadas cilíndricas.*

177 *El paraboloide elíptico* $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$ *en coordenadas cilíndricas.*

178 *El conjunto* $\{(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) : \ 1 \leq r \leq 2, \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, *en coordenadas cartesianas.*

179 *El conjunto de puntos* (ρ, θ, ϕ) *con coordenadas esféricas tales que* $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ *y* $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, *en coordenadas cartesianas.*

180 *El conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \quad y \geq x \geq 0\}$ *en coordenadas cilíndricas.*

181 *El volumen engendrado por el cilindro* $x^2+y^2=1$ *intersectado con los planos* $x+y+z=1$ *y* $z=0$*, en coordenadas cilíndricas.*

182 *La superficie del cono de radio* r *y altura* h *en coordenadas esféricas.*

183 *La superficie* $z = x^2 - y^2$ *en coordenadas cilíndricas y esféricas.*

Solución 177:

Se deben usar las fórmulas del cambio correspondiente, teniendo en cuenta las simplificaciones que puedan llevarse a cabo para que la nueva ecuación resultante sea lo más sencilla posible. En el caso que nos ocupa, tendremos

$$z = \frac{r^2\cos^2\theta}{2} + \frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{4},$$

o incluso

$$z = \frac{r^2}{4}(1+\cos^2\theta).$$

184 *Representa gráficamente y escribe la ecuación en cilíndricas de las esferas:* $(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+(y-a)^2+z^2=a^2$ *y* $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$.

185 *Describir los conjuntos con* $r =$ *constante,* $\theta =$ *constante, en coordenadas polares. Análogamente para* $r =$ *constante,* $\theta =$ *constante y* $z =$ *constante, en coordenadas cilíndricas y* $\rho =$ *constante,* $\theta =$ *constante y* $\phi =$ *constante, en coordenadas esféricas.*

186 *Dos superficies son descritas en coordenadas esféricas por las ecuaciones* $\rho = f(\theta,\phi)$ *y* $\rho = 2f(\theta,\phi)$*. ¿Cómo se representa gráficamente la segunda superficie a partir de la primera?*

187 *Probar que la superficie descrita en coordenadas esféricas por la expresión* $f(\rho,\phi) = 0$ *es una superficie de revolución.*

188 *Dos superficies son descritas en coordenadas esféricas por las ecuaciones $f(\rho, \theta, \phi) = 0$ y $f(\rho, \theta - \pi, \phi) = 0$. ¿Cómo se representa gráficamente la segunda superficie a partir de la primera? ¿Y para $f(4\rho, \theta, \phi) = 0$?*

Solución 188:

Si $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ es un punto de la primera superficie donde se supone que $\theta_0 > \pi$, entonces los puntos de la segunda superficie deberán verificar

$$\theta - \pi = \theta_0,$$

es decir

$$\theta = \theta_0 + \pi.$$

Esto significa que si rotamos la primera superficie alrededor del eje Z un ángulo π obtendremos la segunda superficie.

Del mismo modo, para la superficie $f(4\rho, \theta, \phi)$, los puntos deberán verificar

$$4\rho = \rho_0$$

luego, $\rho = \dfrac{\rho_0}{4}$. Es decir, esta superficie responde a una dilatación de razón $\dfrac{1}{4}$ respecto de la primera.

CAPÍTULO 2

Derivación parcial

En este tema se encuentran ejercicios relacionados con el cálculo diferencial de funciones de varias variables. Siguiendo la pauta del tema anterior, los ejemplos aquí recogidos se refieren esencialmente a funciones de dos o tres variables, aunque las técnicas y razonamientos se pueden llevar sin dificultad a dimensiones superiores. Primero dedicaremos una sección a ejercitarnos en el manejo de funciones de varias variables y su representación gráfica, para pasar a continuación al estudio de límites bidimensionales y a la continuidad de funciones. Seguirán ejercicios diversos sobre derivación parcial, derivadas direccionales, diferenciabilidad, regla de la cadena, así como aplicaciones de estos conceptos. Una breve sección trata también un uso sencillo del teorema de la función implícita y la fórmula de Taylor de orden dos. Para finalizar hemos recopilado una amplia colección de ejercicios de cálculo de extremos con y sin restricciones.

Sección 2.1

Funciones de varias variables

Estudiar el dominio de las siguientes funciones:

189 $f(x,y) = \frac{2x - \operatorname{sen} y}{1+\cos x}$.

190 $f(x,y) = \frac{x+y}{\tan(x+y)}$.

191 $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(x+y)\log x}$.

192 $f(x,y) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$.

193 $f(x,y) = \frac{1}{\log x \log y}$.

194 $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

195 $f(x,y) = \log(x+y)$.

196 $f(x,y) = y^{\operatorname{sen} x}$.

197 $f(x,y) = \log(\log(x-y))$.

198 $f(x,y) = (x^2-y)^x$.

199 $f(x,y) = \sqrt{y} \operatorname{sen} x$.

200 $f(x,y) = x + \arccos y$.

201 $f(x,y) = \log_{x+y}(xy)$.

202 $f(x,y) = \log_{2x-y}(x+3y)$.

203 $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1}$.

204 $f(x,y,z) = \frac{2x+y-z}{x^2+y^2+z^2-1}$.

205 $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2-4y^2-1}$.

206 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-2x-3}$.

207 $F(x,y) = \left(y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y}, x^2 \operatorname{sen} \frac{y}{x}, 1\right)$.

208 $F(x,y) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} - 1}, \log(y - x^2)\right)$.

Solución:

190 El cociente que define la función $f(x,y)$ estará definido salvo cuando el denominador se anule, es decir, cuando $\tan(x+y) = 0$. Esto sucede si $x+y = k\pi$ con k un entero arbitrario. Luego el dominio será todo el plano con excepción del conjunto infinito de rectas paralelas de ecuación $x+y = k\pi$.

193 El cociente que define $f(x,y)$ deja de tener sentido cuando el denominador es nulo o no está definido. Así debemos excluir las puntos en que $x \le 0$ e $y \le 0$. Además, debemos excluir también los puntos en que $\log x = 0$, es decir $x = 1$, y del

mismo modo $y = 1$. En definitiva el dominio de esta función es la unión de los conjuntos

$$(0,1) \times (0,1), \quad (0,1) \times (1,+\infty), \quad (1,+\infty) \times (0,1),$$
$$(1,+\infty) \times (1,+\infty).$$

197 En este caso, debemos exigir que el argumento del primer logaritmo, $\log(x-y)$, sea un número estrictamente positivo, es decir $\log(x-y) > 0$. Esto, a su vez sucede si el argumento de este segundo logaritmo es superior a 1. El dominio será por tanto $x - y > 1$ que representa el semiplano por encima de la recta $y = x - 1$.

198 En una función definida como una potencia en que la base y el exponente son a su vez funciones, entendiéndola a través del logaritmo

$$(x^2 - y)^x = e^{x \log(x^2 - y)}$$

vemos con claridad que la única restricción que debemos imponer en este caso concreto es que el argumento del logaritmo (la base de la potencia) sea estrictamente positivo. Luego el dominio corresponderá a la región en que $x^2 - y > 0$. Se trata de la zona debajo de la parábola $y = x^2$.

202 Teniendo en cuenta la propiedad que relaciona los logaritmos naturales con los logaritmos en cualquier otra base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a},$$

podemos expresar la función $f(x,y)$ como el cociente

$$\frac{\log(x+3y)}{\log(2x-y)},$$

y a partir de esta expresión es inmediato deducir el dominio de f,

$$\{2x - y > 0\} \cup \{x + 3y > 0\}.$$

209 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Hallar $f(1,0)$, $f(0,1)$ y $f(1,1)$. ¿Qué puntos de $\mathbb{R}^2$ verifican $f(x,y) = 0$? ¿Cuál es la imagen por f del disco de radio 2?*

210 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. *Calcular* $f(0, 0, 0)$, $f(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. *¿Dónde manda* f *los puntos de la superficie de la esfera unitaria? ¿Qué ocurre con los valores de* f *cuando* $\|(x, y, z)\| \to \infty$*?*

Estudiar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

211 $f(x, y) = |x| - y$.

212 $f(x, y) = x - |y|$.

213 $f(x, y) = |x - y|$.

214 $f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$.

215 $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

216 $f(x, y) = y \operatorname{sgn}(x)$.

217 $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$.

218 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$.

219 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

220 $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

221 $f(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

222 $f(x, y) = x + y^2$.

223 $f(x, y) = x\sqrt{y}$.

224 $f(x, y) = e^{xy}$.

225 $f(x, y) = x^y$.

226 $f(x, y) = \frac{y}{x}$.

227 $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1}$.

Solución:

213 Para esta función f las curvas de nivel corresponden a los puntos del plano que verifican $|x - y| = k$. Evidentemente $k \geq 0$, es decir, las curvas para $k < 0$ son vacías. Observemos que si $k > 0$, la igualdad $|x - y| = k$ se desdobla en las dos igualdades

$$x - y = k, \quad x - y = -k,$$

es decir la curva de nivel a altura k consta de las dos rectas paralelas anteriores. Si $k = 0$ entonces la curva de nivel correspondiente es la recta $y = x$ (Figura 8(a)).

216 Teniendo en cuenta que la función signo, $\operatorname{sgn}(x)$, vale 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ y 0 si $x = 0$, y razonando con un poco de calma las distintas posibilidades, no es complicado llegar

a la conclusión que las curvas de nivel a altura k constan de dos partes

$$y = k,\ x > 0 \quad \text{e} \quad y = -k,\ x < 0,$$

si $k \neq 0$. Si $k = 0$, la curva de nivel es la unión de los dos ejes (Figura 8(b)).

225 Las curvas de nivel de esta función son aquellas de ecuación

$$x^y = k \quad \text{o} \quad e^{y \log x} = k.$$

Tomando logaritmos llegamos a

$$y = \frac{\log k}{\log x}.$$

Observamos que $k > 0$, y que el dominio de f exige $x > 0$. Distinguimos entonces tres casos según $0 < k < 1$, $k = 1$ y $k > 1$. En realidad todas estas curvas son asíntotas contenidas en $x > 0$ con dos ramas según sea $k < 1$ o $k > 1$. Para el caso $k = 1$ se obtienen las dos asíntotas $y = 0$, $x > 0$ y $x = 1$. Véase la Figura 8(c).

227 Las curvas de nivel de esta función corresponden a las de ecuación

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2 - 1} = k.$$

En primer lugar debemos notar que la circunferencia $x^2+y^2-1 = 0$ no pertenece al dominio de f y por tanto estos puntos no corresponden a ninguna curva de nivel. Si operamos en la ecuación anterior obtenemos

$$kx^2 + ky^2 - x - y - k = 0.$$

Si $k = 0$, la curva es la bisectriz $y = -x$ (excluyendo su intersección con los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 - 1$). Si k es distinto de cero, podemos dividir entre k y completar cuadrados hasta conseguir la representación

$$\left(x - \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2k^2}.$$

Esta curva corresponde a una circunferencia con centro en el punto $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k})$ y radio $\sqrt{1+\frac{1}{2k^2}}$. Nótese cómo los puntos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pertenecen a todas estas circunferencias aunque no están en la curva de nivel pues no pertenecen al dominio. Cuando $k \to 0$ se obtienen circunferencias que se van aproximando a la recta $y = -x$ (por un lado o por otro según el signo de k), mientras que si $k \to \infty$ las circunferencias se acercan a la circunferencia unidad (por uno u otro lado según el signo de k) que está fuera del dominio de f. En la Figura 8(d) están indicadas algunas de estas curvas.

228 *Sea* $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$, $f(0, 0) = 0$.

(a) *Esbozar las curvas de nivel* C_α *para* $\alpha = 0{,}001$, $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}5$ *y* $\alpha = 0{,}9$.

(b) *¿Qué ocurre si* $\alpha < 0$ *o* $\alpha > 1$*?*

(c) *Esbozar la sección* $y = 0$ *(es decir, la intersección con el plano* XZ*).*

(d) *Esbozar secciones por planos verticales que pasen por el origen.*

(e) *Esbozar el grafo de* f*.*

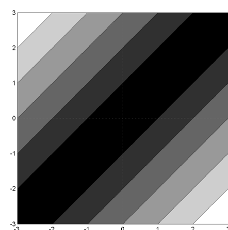
Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

229 *Cuyo nivel 1 sea la curva* $y = \operatorname{sen} x$*;*

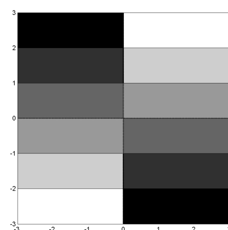
230 *Cuyo nivel -7 sea la curva* $y = \sqrt{x^6 + \log^8 x}$*;*

231 *Cuyo nivel 126 sea la curva* $y^4x + x^3y - 5 = 0$*;*

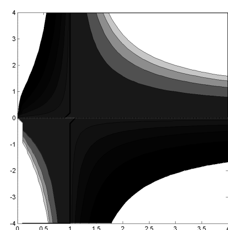
232 *Cuyo nivel 0 sea el conjunto de puntos del interior del círculo unitario* $x^2 + y^2 = 1$ *(sin incluir la frontera).*



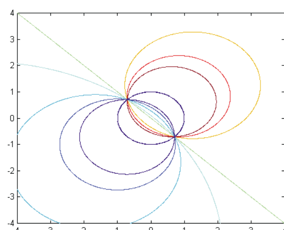
(a) $|x - y| = k$



(b) $y\,\mathrm{sgn}(x) = k$



(c) $x^y = k$



(d) $\frac{x+y}{x^2+y^2-1} = k$

Figura 8. Curvas de nivel de los Ejercicios **213**, **216**, **225** y **227**

Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con dominio el conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada una de las funciones g siguientes, hallar el dominio y su gráfica respecto de la de f.

233 $g(x, y) = f(x, y) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

234 $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$, con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fijo.

235 $g(x, y) = f(-x, -y)$.

236 $g(x, y) = -f(x, y)$.

Usar los ejercicios **233**–**236** *para esbozar la gráfica de las siguientes funciones:*

237 $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$.

238 $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$.

239 $g(x, y) = (-x - 2)^2 + (-y + 3)^2$.

240 $g(x, y) = -x^2 - y^2$.

En $\mathbb{R}^3$ consideremos una curva en el semiplano superior del plano YZ, por ejemplo, la gráfica de una función no negativa $z = f(y)$. Si hacemos girar esta gráfica alrededor del eje Z obtenemos una superficie S en $\mathbb{R}^3$, llamada superficie de revolución. *Obsérvese que un punto $P = (0, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la gráfica de $z = f(y)$, girará formando un círculo C alrededor del eje Z. Este círculo corresponde a una curva de nivel de la superficie S. Es decir, todos los puntos (x, y) del círculo C (viéndolo proyectado en el plano XY) deben tener la misma imagen z. La distancia de un punto cualquiera (x, y) de C al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Es claro entonces que la función cuya gráfica es la superficie de revolución S es $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.*

241 Considerar la parábola $z = y^2$ (en el plano YZ). Probar que la superficie de revolución que se obtiene al girar esta parábola alrededor del eje Z es el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

242 *Considerar la función $z = |y|$ (en el plano YZ). Probar que la superficie de revolución que se obtiene al girar esta función alrededor del eje Z es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

243 *Determinar la superficie de revolución que se obtiene al girar el semicírculo superior $z = \sqrt{a^2 - y^2}$ alrededor del eje Z.*

244 *Determinar la superficie de revolución que se obtiene al girar la catenaria $z = \cosh y$ alrededor del eje Z.*

245 *Probar que la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ es una superficie de revolución. Esbozar su gráfica.*

246 *¿Podría considerarse un plano como una superficie de revolución?*

Solución:

241 En este caso la función que gira es $f(y) = y^2$, de modo que la superficie de revolución que genera será

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

242 Del mismo modo que en el apartado anterior, ahora $f(y) = |y|$, luego

$$z = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

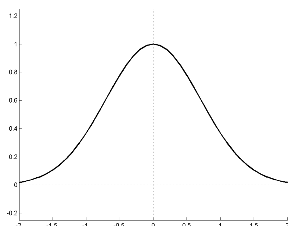
243 $f(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$ luego

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

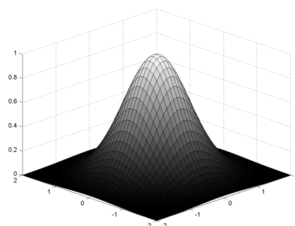
que corresponde a la superficie esférica para $z \geq 0$.

244 $f(y) = \cosh(y)$, por tanto $z = \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})$.

245 Si consideramos la función $f(y) = e^{-y^2}$ entonces la superficie de revolución que genera es precisamente $z = e^{-x^2-y^2}$. La función e^{-y^2} se esboza en la Figura 9(a), y la superficie de revolución generada al girar esta curva respecto del eje OZ se muestra en la Figura 9(b).



(a) Función $f(y) = e^{-y^2}$



(b) Superficie $e^{-x^2-y^2}$

Figura 9. Ejercicio **245**

246 La única forma de ver un plano como superficie de revolución sería rotando una recta perpendicular al eje de giro.

Para cada una de las curvas siguientes situadas en uno de los planos coordenados encontrar la ecuación de la superficie generada al girar dicha curva alrededor del eje indicado. (Indicación: usar el Ejercicio **241***).*

247 $x = 2z^2$, eje X.

248 $4x^2 + 9y^2 = 36$, eje Y.

249 $y^2 - z^2 = 1$, eje Z.

250 $yz = 1$, eje Z.

251 $z = 2x$, eje Z.

252 $z = 2x$, eje X.

Esbozar la gráfica de las siguientes funciones, estudiando previamente sus curvas de nivel y secciones.

253 $f(x, y) = x + y$.

254 $f(x, y) = x^2 - y^2$.

255 $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

256 $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

257 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

258 $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

259 $f(x, y) = x^3 - x$.

260 $f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$.

261 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

262 $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$.

263 $f(x,y) = \log(x^2 + y)$.

264 $f(x,y) = \operatorname{sen} x$.

Describir las superficies de nivel de las siguientes funciones:

265 $f(x,y,z) = x + y + z$.

266 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

267 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

268 $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$.

Sección 2.2

Límites y continuidad

Calcular los siguientes límites dobles:

269 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2y^2$.

270 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}$.

271 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2y^2}$.

272 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$.

273 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

274 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

275 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^3}{x^2+y^4}$.

276 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{(x^2-y)^2+y^6}$.

277 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

278 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

279 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy}$.

280 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

281 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (1+|x|)^{|xy|^{-1}}$.

282 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}$.

283 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

284 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$.

285 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x}$.

286 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y}{x-y^4}$.

287 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2}$.

288 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$.

289 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{(x^2+y^2)^{-1}}.$

290 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2}.$

291 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2).$

292 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+y^2-2x+2y+2}.$

293 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^3-y^3}-1}{\operatorname{arc\,sen}(x^2+y^2+x)-\operatorname{arc\,sen} x}.$

294 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^3-x^2y}{y^4+x^2}.$

295 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x+2y}.$

Solución:

271 Una de las formas más efectivas de calcular un límite doble es usar el cambio a coordenadas polares, gracias al cual es posible asegurar que si

$$\lim_{r\to 0} f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\operatorname{sen}\theta)=L,$$

con independencia del ángulo θ, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L.$$

En este caso podemos escribir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2},$$

y escribiendo todas las expresiones en coordenadas polares llegamos a que el límite que nos interesa es el producto

$$\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2}\cdot\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}.$$

El primer factor tiene límite 1, mientras el segundo tiene límite $+\infty$ con independencia de cómo sea la función θ. En consecuencia el límite solicitado es $+\infty$.

275 Una forma muy cómoda de convencerse de que el límite solicitado es nulo consiste en usar la desigualdad

$$|2ab| \leq a^2 + b^2,$$

válida para cualesquiera a, b. En particular

$$\left|2xy^2\right| \cdot |y| \leq \left(x^2 + y^4\right)|y|.$$

Luego

$$\left|\frac{2xy^3}{x^2 + y^4}\right| \leq |y|,$$

y como $|y| \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$, concluimos que el límite pedido es nulo.

Otro modo de llegar a la misma conclusión consiste en analizar el límite en coordenadas polares, teniendo que examinar el límite

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^4\theta},$$

donde $\theta = \theta(r)$ puede ser cualquier función arbitraria. Si $\cos^2\theta$ no converge a cero, el límite anterior es claramente nulo. Si se tiene que $\cos^2\theta \to 0$, tomando

$$\frac{\cos\theta}{r} \to a,$$

observamos que, dividiendo numerador y denominador entre r^2 en la expresión anterior, el limite sería nulo pues el denominador tiende a $1 + a^2$ mientras el numerador tiende a cero. Si a resulta ser infinito, entonces

$$\frac{r}{\cos\theta} \to 0,$$

y en este caso, dividiendo entre $\cos^2\theta$, llegamos a la misma conclusión sobre el límite.

289 Para este ejercicio, basta observar que con el cambio a polares y tomando $s = \frac{1}{r^2}$, se debe estudiar

$$\lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s.$$

Conocemos bien que este límite es el número e.

293 En primer lugar obsérvese que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^3-y^3}-1}{x^3-y^3} = \frac{1}{2}.$$

Para darse cuenta de ello considérese la función $f(t) = \sqrt{1+t}$ y nótese que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Poniendo $t = x^3 - y^3$ se obtiene el resultado.

Del mismo modo, para $f(t) = \operatorname{arc\,sen}(t)$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x^2+y^2+x) - \operatorname{arc\,sen} x}{x^2+y^2} = 1.$$

De este modo el límite solicitado será $\frac{1}{2}$ multiplicado por

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},$$

y este limite es nulo, lo cual es inmediato de comprobar. En consecuencia el límite solicitado es también nulo.

295 Puesto que tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ podemos factorizar el polinomio del numerador dividiendo por $x+2y$, de modo que

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^2}{x+2y} = \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x+2y)(x^2-y^2)}{x+2y} = 3.$$

296 *Estudiar el siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\int_0^{x^2y}\frac{dt}{1+t^4}.$$

Solución 296:

Basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^{x^2y}\frac{dt}{1+t^4} = \frac{x^2y}{x^2+y^2}\frac{1}{x^2y}\int_0^{x^2y}\frac{dt}{1+t^4}.$$

El primer factor tiene límite nulo, lo cual es sencillo de comprobar planteándolo en polares; mientras que el segundo factor tiene límite 1 por el teorema fundamental del Cálculo.

Calcular los siguientes límites:

297 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}.$

298 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}.$

299 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

300 $\log(2x+3y)$.

301 $f(x,y)=\tan(x^4-y^4)$.

302 $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

303 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

304 $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} & \text{si } x\neq 0 \text{ ó } y\neq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}.$

305 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

306 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4x^2+y^2-1} & \textit{si } 4x^2+y^2-1 \neq 0, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$

307 $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \textit{si } x \geq 0, \\ 3x+y^2 & \textit{si } x < 0, \end{cases}$

308 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^y+2x^2}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

309 $f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+|y|}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solución:

304 Está claro que en los puntos que no pertenecen a los ejes, la función es continua por ser composición de funciones continuas. Cuando nos preocupamos por la continuidad de f en un punto del eje X, del tipo $(a,0)$ para a no nulo, comprobamos que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y}$$

no existirá, pues el factor $\operatorname{sen}(\frac{1}{y})$ oscila de manera persistente cuando nos acercamos a cero, a no ser que la amplitud $(x+y)$ converja a cero, y en tal caso anule tales oscilaciones (lo que no puede ocurrir pues hemos tomado inicialmente $a \neq 0$), o que el factor $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ sea nulo, lo que sí sucede para los valores $x = \frac{1}{k\pi}$. Así pues hay continuidad en los puntos $(a,0)$ con $a = \frac{1}{k\pi}$. Lo mismo sucede en los puntos $(0,a)$ con $a = \frac{1}{k\pi}$. En el resto de puntos de los ejes, la función no es continua. Finalmente, estudiamos qué sucede en el origen. En este caso, tenemos oscilaciones bruscas de los dos factores senoidales. Sin embargo como estas oscilaciones están acotadas por la

unidad, y el factor amplitud $(x+y)$ sí converge a cero, resulta que el límite es nulo, y por tanto la función es continua en el origen. De manera más precisa diríamos

$$0 \leq \left|(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \to 0$$

si $(x,y) \to (0,0)$.

309 Fuera del origen ninguna de las funciones componentes presenta problemas de continuidad por lo que se trata de estudiar el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ de las dos componentes de la función vectorial. La segunda componente es evidentemente continua. Con respecto a la primera debemos estudiar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+|y|}$$

existe y es nulo. Planteando el límite en coordenadas polares es directo comprobar que esto es, efectivamente, así.

310 *¿Es posible redefinir la función*

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

para que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$*?*

311 *Supongamos que* $f(x,y)$ *es continua en* (x_0,y_0)*. Probar que la función* $g(x) = f(x,y_0)$ *es continua en* x_0*.*

Sección 2.3

Derivadas parciales

Encontrar en cada caso las derivadas parciales f_x *y* f_y *para las funciones:*

312 $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$.

313 $f(x,y) = \cos(y\sqrt{x})\operatorname{sen}(x\sqrt{y})$.

314 $f(x,y) = 7x^2 - \log(\cos x \cos y)$.

315 $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

316 $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Evaluar las derivadas parciales de las funciones dadas en los puntos indicados:

317 $f(x,y) = e^{ax}\cos(bx+y)$, $(\frac{2\pi}{b}, 0)$.

318 $f(x,y) = (4cx^2)^y - (4cy^2)^x$, $(c, \frac{c}{2})$.

319 $f(x,y) = e^{xy}\operatorname{sen}(x+y)$, $(0,0)$.

320 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3+y^3}$, $(-1,2)$.

321 $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(0,0), (\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, *con* $a > 0$.

Calcular las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes:

322 $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} g(t)\,dt$.

323 $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^y}^{y^x} g(t)\,dt$.

324 $f(x,y) = \displaystyle\int_{\int_y^x g(t)\,dt}^{\int_x^y g(t)\,dt} g(t)\,dt$.

Solución 324:

Debemos usar el teorema fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena con un poco de precaución para no confundirnos en los cálculos. Se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right)(-g(x)) - g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)g(x);$$

o factorizando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)\left(g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right) + g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)\right).$$

Del mismo modo tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)\left(g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right) + g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)\right).$$

325 *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$$

(a) *¿Para qué puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x,y) > 0$?*

(b) *¿Para qué puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x,y) < 0$?*

(c) *¿Cuál es el nivel cero de f?*

(d) *Calcular las derivadas parciales de la función f.*

(e) *Realizar los apartados anteriores suponiendo ahora que g es una función impar tal que $g(t) > 0$ para $t > 0$.*

326 *Para $f(x,y) = e^{xy}$ mostrar que*

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

327 *Hallar α tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, con $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \alpha \cos x \cos y$.*

Solución 327:

Después de calcular las dos derivadas parciales de f e igualar las expresiones obtenidas, llegamos a

$$\cos x \operatorname{sen} y - \alpha \operatorname{sen} x \cos y = \cos y \operatorname{sen} x - \alpha \operatorname{sen} y \cos x.$$

De aquí es fácil concluir que $\alpha = -1$.

328 *Calcular las derivadas parciales de la función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución 328:

Fuera del origen la función f está definida y es derivable. Las derivadas parciales se calculan con un poco de paciencia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\cos(x^3y^2)x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4\sin(x^3y^2)x}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cos(x^3y^2)x^3y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4\sin(x^3y^2)y}{(x^2+y^2)^3}.$$

Si nos centramos en el origen, en primer lugar deberíamos comprobar que la función f es continua, pues si no lo fuera, no podría admitir derivadas parciales. Sin embargo, reescribiendo $f(x,y)$ como

$$\frac{\operatorname{sen}(x^3y^2)}{x^3y^2}\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

se ve inmediatamente (usando polares) que el límite de esta expresión cuando $(x,y) \to (0,0)$ existe y es nulo. Veamos la derivada parcial respecto a x en $(0,0)$. Correspondería al límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

pero este cociente es nulo si $h \neq 0$, y en consecuencia el límite anterior también. Así

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Lo mismo sucede con la derivada parcial respecto a y.

329 *Probar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial z}\left((x^2+y^2+z^2)^{1/3}\right)$$

no existe.

Calcular el gradiente de las siguientes funciones:

330 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$.

331 $f(x,y) = xe^{xy^3+3}$.

332 $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-z^2-x-y}$.

333 $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

334 $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$, $\mathbf{n} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

335 $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0) = (-1,0)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$.

336 $f(x,y) = x^y - y^x$, $(x_0,y_0) = (e,e)$, $\mathbf{n} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

337 $f(x,y) = (x-1)y^2e^{xy}$, $(x_0,y_0) = (0,1)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)$.

338 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, $(x_0,y_0) = (a,b)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,a)$.

339 $f(x,y,z) = e^x + yze^y$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

340 *¿En qué dirección la derivada direccional de la función*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

en el punto $P = (1,1)$, es igual a cero?

341 *Determina un vector unitario* $\mathbf{n}$ *de modo que la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = \frac{1-xy}{z}$ en el punto $(1,1,1)$ y en la dirección pedida sea $-\sqrt{2}$.*

Solución 341:

Es directo conseguir que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, \frac{xy-1}{z^2}\right),$$

y por tanto

$$\nabla f(1,1,1) = (-1,-1,0).$$

Puesto que para una función diferenciable, la derivada direccional viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \mathbf{n},$$

el vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ debe verificar

$$(-1,-1,0) \cdot (n_1, n_2, n_3) = -\sqrt{2}, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

De la primera condición se obtiene

$$n_1 = \sqrt{2} - n_2,$$

y llevándola a la segunda ecuación,

$$1 - 2\sqrt{2}n_2 + 2n_2^2 + n_3^2 = 0.$$

Completando cuadrados, podemos escribir

$$2\left(n_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + n_3^2 = 0.$$

La única posibilidad es que

$$n_3 = 0, \quad n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

342 *La derivada direccional de una función diferenciable* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ *toma los valores* 3, 1 *y* -1 *en la dirección de los ejes coordenados* X, Y, Z, *respectivamente. Encontrar el valor de* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

343 *La derivada direccional de una función diferenciable* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ *toma los valores* 3, 1 *y* -1 *en la dirección de los vectores* $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ *y* $(1,1,0)$, *respectivamente. Encontrar el valor del gradiente de* f *en el punto* (x_0, y_0, z_0).

Solución 343:

La información que nos proporcionan, si ponemos

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (a, b, c),$$

es

$$(a, b, c) \cdot (0, 1, 1) = 3,$$
$$(a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 1,$$
$$(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = -1.$$

Se trata por tanto de determinar el vector (a, b, c) a partir de esta información. En definitiva, debemos resolver el sistema lineal anterior. Los valores que se obtiene son

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{5}{2}.$$

344 *Si* $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *denota la altura de una montaña, ¿en qué dirección desde* $(1, 0)$ *se debería comenzar a caminar para escalar más rápidamente?*

345 *Determinar el camino de mayor inclinación de la superficie dada por* $f(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2$ *partiendo del punto* $(a, b, a^4 + b^4)$.

Encontrar un vector normal de cada una de las siguientes curvas en el punto dado:

346 $\sqrt{x^2 - y^2} = 1$, $(\sqrt{2}, 1)$.

347 $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{6}$, $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

348 $xe^{xy} = 2e$, $(2, \frac{1}{2})$.

349 $\arctan(xe^y) = \frac{\pi}{4}$, $(1, 0)$.

Encontrar la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos dados:

350 $xy^2 = 1$, $(\frac{1}{4}, 2)$.

351 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 5$, $(2, -1)$.

352 $xe^{xy} = 2$, $(2, 0)$.

353 $(x + y)\arctan(xy) = \frac{5\pi}{8}$, $(2, \frac{1}{2})$.

354 *Probar que las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ son perpendiculares a las curvas de nivel de $g(x, y) = \frac{y}{x}$ en todos sus puntos.*

Solución 354:

Recuérdese que dos curvas son perpendiculares en un punto si sus rectas tangentes en dicho punto lo son. Equivalentemente, dos curvas serán perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales. Basta entonces comprobar que los vectores gradiente de f y de g son perpendiculares en todo punto. En efecto

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \nabla g = (-\frac{y}{x^2}, 1/x),$$

y

$$\nabla f \cdot \nabla g = 0,$$

en todo punto.

355 *Probar que la recta tangente a una cónica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación*

$$Ax_0x + By_0y + \frac{C}{2}(x + x_0) + \frac{D}{2}(y + y_0) + E = 0.$$

Solución 355:

Si el punto (x_0, y_0) debe pertenecer a la cónica, tendremos

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cx_0 + Dy_0 + E = 0.$$

El vector normal a dicha cónica en el punto (x_0, y_0) vendrá dado por el gradiente en dicho punto

$$(2Ax_0 + C, 2By_0 + D).$$

Por lo tanto la recta tangente consta de todos los puntos cuya diferencia a (x_0, y_0) es perpendicular al vector anterior, es decir, tendrá ecuación

$$(2Ax_0 + C, 2By_0 + D) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Si desarrollamos y usamos la ecuación primera, después de unas cuantas manipulaciones llegamos a que la ecuación de dicha recta es

$$Ax_0x + By_0y + \frac{C}{2}(x + x_0) + \frac{D}{2}(y + y_0) + E = 0.$$

Encontrar la ecuación del plano tangente a las siguientes funciones en los puntos dados:

356 $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2}$ *en* $(1, 0), (0, 1), (-1, 1), (0, 0)$.

357 $f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$ *en* $(-\pi, 0), (0, \pi)$.

358 $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$ *en* $(0, \frac{\pi}{2})$.

359 $f(x, y) = x - y + 2$ *en* $(1, 1)$

360 $f(x, y) = \log(x \cos y) + \operatorname{arc\,tg}(x + y)$ *en* $(1, 0)$

361 $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ *en* $(0, 0)$

362 $f(x, y) = axy$ *en* $(1, \frac{1}{a})$

363 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ *en* $(1, -1)$.

Para cada apartado de los Ejercicios **356–363** *calcular el vector normal a la superficie* $f(x, y)$ *en los puntos indicados.*

364 *Considerar la función*

$$f(x, y) = \frac{1 + \operatorname{sen}(e^x)}{1 - \cos(e^y)}.$$

(a) *Hallar la ecuación del plano tangente en el punto* $(\log \pi, \log \pi)$.

(b) *Calcular la derivada direccional en el punto anterior y en la dirección dada por el vector* $\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3}, -\sqrt{7})$.

Solución 364:

(a) La ecuación del plano tangente al grafo de una función en un punto (x_0, y_0) se escribe como:

$$z - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Por tanto, para determinar la ecuación del plano tangente necesitamos el vector gradiente y el valor de la función en dicho punto. En concreto

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{e^x \cos(e^x)}{1 - \cos(e^y)}, -\frac{e^y \operatorname{sen}(e^y)(1 + \operatorname{sen}(e^x))}{(1 - \cos(e^y))^2} \right).$$

En el punto pedido, tenemos

$$\nabla f(\log \pi, \log \pi) = (-\frac{\pi}{2}, 0), \quad f(\log \pi, \log \pi) = \frac{1}{2},$$

y la ecuación del plano tangente será

$$-\frac{\pi}{2}(x - \log \pi) = z - \frac{1}{2}.$$

(b) Para encontrar la derivada direccional dada, puesto que la función es diferenciable en ese punto, debemos hacer el producto escalar del vector gradiente en el punto concreto y el vector unitario que determina la dirección, es decir,

$$(-\frac{\pi}{2}, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3}, -\sqrt{7}) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}.$$

365 *Probar que las gráficas de* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *y* $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ *son tangentes en el origen.*

366 *¿En qué punto o puntos el plano tangente al grafo de la función* $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ *es horizontal (paralelo al plano del suelo)?*

367 *¿En qué punto el plano tangente al grafo de la función* $f(x, y) = 9 - 4x^2 - y^2$ *es paralelo al plano* $z = 4y$*?*

368 *Encontrar los puntos de la superficie* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ *que tienen su plano tangente perpendicular al vector* $(1, 1, \sqrt{3})$.

369 *Probar que la ecuación del plano tangente al elipsoide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *en* (x_0, y_0, z_0) *puede escribirse como*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Encontrar ecuaciones similares para el hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$, $k \neq 0$, *y el paraboloide* $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Solución 369:

El vector normal al elipsoide en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right).$$

En consecuencia la ecuación del plano tangente deberá expresar que el vector anterior debe ser normal a dicho plano tangente y pasar por (x_0, y_0, z_0)

$$2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Esto se puede desarrollar como

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Sin embargo, como (x_0, y_0, z_0) es un punto del elipsoide, debemos tener

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

de modo que la ecuación del plano se simplifica a

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

De la misma manera, es sencillo obtener las ecuaciones

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = k$$

y

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z + z_0}{2} = 0,$$

para los planos tangentes al hiperboloide y al paraboloide de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

respectivamente.

370 *El plano tangente a la superficie $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) interseca a los ejes coordenados en $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$. Probar que la cantidad $a+b+c$ es independiente del punto de tangencia.*

371 *Probar que para $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, f_x y f_y son ambas nulas en el origen. ¿Tiene la gráfica plano tangente en el origen?*
(Ayuda: considérese la sección por el plano $x - y = 0$).

372 *Sea g una función diferenciable de una variable y $f(x, y) = xg(\frac{y}{x})$. Probar que todo plano tangente al grafo de f pasa por el origen.*

Solución 372:

Como vimos en el Ejercicio **364**, la ecuación del plano tangente al grafo de una función en un punto (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = z - f(x_0, y_0).$$

Si cualquiera de estos planos debe pasar por el origen deberíamos tener

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_0, y_0) = f(x_0, y_0).$$

Luego en el caso concreto en que $f(x, y) = xg(\frac{y}{x})$ todo se reduce a comprobar que

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y).$$

Esto es inmediato comprobarlo.

Comprobar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar su diferencial en un punto arbitrario:

373 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^4 - y^4$.

374 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2, x + y)$.

375 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (2 + x + y, x^2 + y^2, e^{xy})$.

376 *Dada la función:*

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \qquad f(0, 0) = 0,$$

comprobar que admite derivadas direccionales en el origen según cualquier vector unitario (v_1, v_2). *¿Es* f *diferenciable en el origen?*

Solución 376:

Es inmediato comprobar que f es continua en el origen estudiando el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ mediante coordenadas polares. Por otro lado los límites que definen las derivadas parciales en el origen son triviales, obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Para comprobar si f es diferenciable en el origen deberíamos preocuparnos por decidir si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

existe y es nulo. Si no existe o no es nulo, la función no será diferenciable en el origen. En concreto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3.$$

El límite dentro del cubo no existe, lo cual es evidente si lo escribimos en coordenadas polares. En consecuencia la función no es diferenciable en el origen.

377 *Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - (y - 1)^3}{x^2 + (y - 1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1); \end{cases}$$

en el punto $(0,1)$.

378 *Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

379 *Dada la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\operatorname{sen} y+y^2\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

(a) *Estudiar la existencia de derivadas direccionales de* f *en el origen.*

(b) *Calcular el vector gradiente de* f *en el* $(0,0)$.

(c) *Usando los apartados anteriores, decidir si al función* f *es o no diferenciable.*

380 *Probar que la función* $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ *si* $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$ *no posee derivadas direccionales en el punto* $(0,0)$ *para todo vector* $\mathbf{n}\in\mathbb{R}^2$. *¿Es* f *diferenciable en el origen? ¿Es* f *continua en* $(0,0)$*?*

381 *Consideremos la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \beta & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

donde α *y* β *son números reales cualesquiera. ¿Es posible encontrar una relación entre* α *y* β *para que existan las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$*? En caso afirmativo, ¿Cuánto valen* $f_x(0,0)$ *y* $f_y(0,0)$*? ¿Es* f *diferenciable en* $(0,0)$*?*

Solución 381:

Si escribimos los límites que proporcionan las derivadas parciales, encontramos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\beta}{h},$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\beta}{h}.$$

Para que este limite exista no queda más remedio que tomar $\beta = \alpha$, en cuyo caso ambas derivadas parciales son nulas. Si además $\alpha = \beta = 0$, la función es idénticamente nula y por tanto trivialmente diferenciable. Sin embargo, si $\alpha = \beta \neq 0$, la función no puede ser diferenciable en el origen pues el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe. Basta tomar $y = tx$ con t constante para observar que el límite anterior vale

$$\frac{\alpha\,(1+|t|)}{\sqrt{1+t^2}},$$

que claramente depende del parámetro t. De este modo la función no es continua en el origen, y por tanto tampoco diferenciable.

382 *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostrar que f_x y f_y existen en todo punto, pero f no es continua en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en este punto?

Estudiar la diferenciabilidad en todo $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

383 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

384 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

385 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

386 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2-y^2-1}}{x-y} & \text{si } y \neq x, \\ 2x & \text{si } y = x. \end{cases}$

Solución: 384:

Usando directamente la definición, es sencillo encontrar que las dos derivadas parciales en el origen son nulas. Por tanto, para comprobar si esta función es diferenciable en dicho punto debemos examinar si el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

existe y es nulo. Esto es así pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Nótese que el seno siempre está acotado por 1 en valor absoluto, y el factor $\sqrt{x^2+y^2}$ tiende a cero. Por tanto la función es diferenciable en el origen. Fuera del origen la función admite derivadas parciales que son continuas,

$$f_x = 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f_y = 2y\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2};$$

luego también es diferenciable.

Sección 2.4

Regla de la cadena y derivadas de orden superior

Verificar la regla de la cadena en cada caso para $f \circ c$ *y* $c \circ f$*:*

387 $f(x, y) = xy$, $c(t) = (e^t, \cos t)$.

388 $f(x, y) = e^{xy}$, $c(t) = (3t^2, t^3)$.

389 $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$, $c(t) = (t, -t)$.

390 *Sea* $f(x, y) = g(x + 2y^2)$ *donde* g *es una función conocida de una variable. Razonar si es correcta la siguiente igualdad:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

391 *Dada la función* $f(x, y, z) = \int_{x+z^2}^{x^2+y} h(s)\, ds$, *donde* h *es una función cualquiera de una variable, decidir y razonar si es cierto*

$$2z\frac{\partial f}{\partial x} = 4xz\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Solución 391:

Mediante la regla de la cadena y el teorema fundamental del Cálculo, encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xh(x^2 + y) - h(x + z^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = h(x^2 + y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2zh(x + z^2).$$

Por lo tanto la expresión

$$2z\frac{\partial f}{\partial x} - 4xz\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

queda idénticamente igual a cero.

392 *Sea $f(x,t) = g(x - ct) + h(x + ct)$ con c una constante y g y h funciones de una variable. Probar que f satisface la ecuación de ondas:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

393 *Comprueba que la función*

$$u(x,y) = \int_{xy}^{x^2y^2} g(t)\, dt$$

es solución de la ecuación $xu_x - yu_y = 0$.

394 *Sean las funciones:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x.$$

Se pide:

(a) *Probar que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y valen cero.*

(b) *¿Es f continua en $(0,0)$?*

(c) *Se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x, g(x))$. Calcular $h'(0)$, directamente y mediante la regla de la cadena.*

(d) *Concluir del apartado anterior que f no es diferenciable en $(0,0)$.*

Solución 394:

(a) Directamente de la definición se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

y lo mismo para la parcial respecto a y. Ambas son nulas.

(b) La función f sí es continua en el origen pues

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

y en consecuencia

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\,|x| \to 0$$

si $(x,y) \to (0,0)$. El limite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ es nulo, y coincide con el valor de la función.

(c) Por sustitución directa encontramos que

$$h(x) = \frac{x}{2},$$

de modo que $h'(0) = \frac{1}{2}$. Si usamos la regla de la cadena, tendremos

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))g'(x).$$

Cuando $x=0$,

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

por (a).

(d) La función f no puede ser diferenciable en el origen pues si lo fuera los dos modos de calcular la derivada $h'(0)$ del apartado anterior deberían haber coincidido.

395 *Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $g(\rho,\theta,\phi) = f(x,y,z)$, donde*

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Calcular g_ρ, g_θ y g_ϕ y aplicarlo a la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Escribir la regla de la cadena para cada caso

396 $h(x,y) = f(x,u(x,y))$, h_x.

397 $h(t) = f(t,u(t),v(t))$, h'.

398 $h(x,y,z) = f(u(x,y,z),v(x,y),w(x))$, h_x.

399 $F(x,y) = (g_1(h(x,xy,x^2),xy), g_2(\cos(x^2+y^2), \operatorname{sen}(x^2y)))$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}$.

400 *Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y*

$$g(x,y) = f_{,1}(f(x,y),y) + f_{,2}(x,f(x,y)),$$

encontrar g_x y g_y.

401 *Sea F una función de una variable y f una función de dos variables. Probar que el gradiente de $g(x,y) = F(f(x,y))$ es paralelo al gradiente de $f(x,y)$.*

402 *Usar la regla de la cadena con la función $f(y,z) = y^z$ para calcular $\dfrac{d}{dx}(x^x)$. Aplicarlo también al cálculo de $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ y $\operatorname{sen} x^{\cos x}$.*

403 *Expresar las coordenadas polares r y θ en función de las coordenadas cartesianas y encontrar la matriz de derivadas parciales $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$.*

Sea $g(u,v)$ una función diferenciable y u, v funciones de x e y.

404 *Probar que*

$$g_{xx} = g_u u_{xx} + g_v v_{xx} + g_{uu} u_x^2 + 2g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2$$

405 *Encontrar expresiones similares para g_{yy} y g_{xy}.*

Solución:

404 En primer lugar tenemos para las derivadas parciales primeras de

$$G(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)),$$

que

$$G_x = g_u u_x + g_v v_x, \quad G_y = g_u u_y + g_v v_y,$$

y derivando de nuevo estas expresiones respecto a x e y, encontramos mediante la regla del producto,

$$G_{xx} = (g_{uu}u_x + g_{uv}v_x)u_x + g_u u_{xx} + (g_{vu}u_x + g_{vv}v_x)v_x + g_v v_{xx},$$

y agrupando términos

$$G_{xx} = g_{uu}u_x^2 + 2g_{uv}u_x v_x + g_{vv}v_x^2 + g_u u_{xx} + g_v v_{xx}.$$

405 Del mismo modo se llega a

$$G_{xy} = g_{uu}u_x u_y + g_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + g_{vv}v_y v_x + g_u u_{xy} + g_v v_{xy},$$
$$G_{yy} = g_{uu}u_y^2 + 2g_{uv}u_y v_y + g_{vv}v_y^2 + g_u u_{yy} + g_v v_{yy}.$$

406 *Si* $z = \dfrac{f(x-y)}{y}$ *probar que* $z + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Verificar en cada caso que las funciones que se dan satisfacen la condición especificada:

407 $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ *verifica* $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

408 $\phi(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$, *con* f *y* g *funciones cualesquiera, verifica* $\phi_{xx} = \phi_{tt}$.

409 $f(x,y,z) = ze^{xy} + yz^3x^2$ *verifica* $f_{xyz} = f_{zyx}$.

410 $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}$, *con* f *una función cualquiera, verifica*

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

411 *Sea* $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + yz^2$. *Encontrar* f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} *y* f_{xyz}.

Calcular todas las segundas derivadas parciales de:

412 $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$.

413 $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

414 *Sea* $z = x^4y^3 - x^8 + y^4$. *Calcular* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$, $\dfrac{\partial z^3}{\partial x \partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial y}$.

Una función $u = f(x,y)$ *con derivadas segundas continuas que satisface la ecuación de Laplace*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se dice función armónica. Probar que las siguientes funciones son armónicas:

415 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

416 $u(x,y) = xy$.

417 $u(x,y) = x^2 - y^2$.

418 $u(x,y) = y^3 + 3x^2y$.

419 $u(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$.

420 $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.

421 *Probar que si* $f(x,y)$ *es una función armónica (cf. Ejercicios* **415**–**420***) entonces la función* $g(x,y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ *también es armónica. (Ayuda: obsérvese que* $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ *y* $v = \frac{y}{x^2+y^2}$ *son funciones armónicas).*

Solución 421:

A partir de la información de que la función $f(x,y)$ es armónica, y la indicación de que

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-\,y}{x^2+y^2},$$

son armónicas, se trata de concluir que la composición

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

también es armónica. En efecto, usando el cálculo efectuado en el problema **404**, podemos escribir

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} =& f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + f_{vv}v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx} \\ &+ f_{uu}u_y^2 + 2f_{uv}u_yv_y + f_{vv}v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}, \end{aligned}$$

y factorizando de manera apropiada

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} =& f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) \\ &+ f_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned}$$

También podemos escribir

$$g_{xx} + g_{yy} = f_{uu} \left|\nabla u\right|^2 + 2f_{uv}\nabla u \cdot \nabla v + f_{vv} \left|\nabla v\right|^2 + f_u \Delta u + f_v \Delta v.$$

Ahora bien a partir de la identidad

$$v(x, y) = -u(y, x)$$

es sencillo comprobar que

$$\left|\nabla u\right|^2 = \left|\nabla v\right|^2, \quad \nabla u \cdot \nabla v = \Delta u = \Delta v = 0,$$

y en consecuencia

$$g_{xx} + g_{yy} = \Delta f \left|\nabla u\right|^2$$

que es también cero pues f es armónica. Luego g es armónica.

422 *La ecuación del calor en dos dimensiones se escribe*

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}).$$

Probar que una solución de esta ecuación viene dada por la función

$$u(t, x, y) = e^{-(m^2+n^2)kt} \operatorname{sen}(mx) \cos(ny),$$

donde m y n son constantes cualesquiera.

423 *Sea $u(x, y)$ una función diferenciable que verifica $xu_x + yu_y = 0$. Si se hace el cambio a coordenadas polares*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad U(r, \theta) = u(x, y),$$

encontrar la ecuación que verifica la función $U(r, \theta)$.

424 *Considerar la función*

$$f(x, y) = (2 + \operatorname{sen} x)^{y^2}.$$

(a) *Calcula y simplifica la segunda derivada parcial mixta de f.*

(b) *Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$.*

(c) *Calcula la derivada direccional de f en la dirección dada por el vector $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{122}}, \frac{-11}{\sqrt{122}})$ en el punto $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$.*

(d) *Si $g(x) = f(x^2, u(x))$ para una cierta función u, calcula $g'(x)$.*

Solución 424:

(a) Entendiendo la función $f(x, y)$ como

$$f(x, y) = e^{y^2 \log(2+\operatorname{sen} x)}$$

(notando que $2+\operatorname{sen} x > 0$ para todo x) es sencillo encontrar la derivada solicitada. Después de unos cuantos cálculos

$$f_{xy} = 2y \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^{y^2-1} \left(1 + y^2 \log(2 + \operatorname{sen} x)\right).$$

(b) Para la ecuación del plano tangente, necesitamos el valor de la función y el gradiente en el punto pedido. En concreto

$$\nabla f = \left(y^2 \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^{y^2-1}, 2y \log(2 + \operatorname{sen} x)(2 + \operatorname{sen} x)^{y^2}\right),$$

y

$$f(-\frac{\pi}{2}, \pi^2) = 1, \quad \nabla f(-\frac{\pi}{2}, \pi^2) = (0, 0),$$

de modo que el plano tangente es $z = 1$.

(c) Puesto que el gradiente es nulo en $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$ por el apartado anterior, cualquier derivada direccional será también nula.

(d) Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g'(x) =& f_x 2x + f_y u'(x) \\ =& 2x(u(x))^2 \cos x^2 (2 + \operatorname{sen} x^2)^{(u(x)^2-1)} \\ & + 2u(x)u'(x)(2 + \operatorname{sen} x^2)^{(u(x))^2} \log(2 + \operatorname{sen} x^2) \end{aligned}$$

425 *Sea*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) *Si* $(x, y) \neq (0, 0)$ *calcular* f_x, f_y.

(b) *¿Cuál es el valor de* $f(x, 0)$ *y* $f(0, y)$*?*

(c) *Mostrar que* $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(d) *Probar que* $f_x(0, y) = -y$ *si* $y \neq 0$.

(e) *Calcular* $f_y(x, 0)$ *para* $x \neq 0$.

(f) *Probar que* $f_{yx}(0, 0) = 1$ *y* $f_{xy}(0, 0) = -1$.

426 *Se dice que una función* $f(x, y)$ *es homogénea de grado* n *si satisface la fórmula de Euler*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y). \qquad (*)$$

Se pide:

(a) *Probar que la función* $f(x, y) = g(\frac{y}{x})$ *es homogénea de grado 0, cualquiera que sea* g*, función de una única variable.*

(b) *Sea* $f(x, y)$ *homogénea de grado* m*,* $g(x, y)$ *y* $h(x, y)$ *homogéneas de grado* n*. Probar que* $z(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ *es homogénea de grado* mn*.*

(c) *Otra forma de definir la homogeneidad es la siguiente:* $f(x, y)$ *es homogénea de grado* n *si verifica*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \qquad (**)$$

Probar que si f *satisface esta condición, entonces verifica* $(*)$*. (Ayuda: derivar con respecto a* t *en* $(**)$*).*

(d) *Probar el recíproco del apartado anterior, es decir, si* $f(x, y)$ *satisface la condición* $(*)$ *entonces también verifica* $(**)$*. (Ayuda: usar que si* $g'(t) = n\frac{g(t)}{t}$ *entonces* $g(t) = ct^n$*).*

Solución 426:

(c) Supongamos que $f(x, y)$ satisface

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para cualquier par (x, y) y cualquier real t. Si derivamos la identidad anterior con respecto a t, tendremos

$$xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty) = nt^{n-1} f(x, y).$$

En particular para $t = 1$, llegamos a

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

(d) A la inversa, supongamos que $f(x, y)$ es tal que

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

para todo par (x, y). Para un tal punto fijo, consideremos la función

$$g(t) = f(tx, ty).$$

Si calculamos su derivada

$$g'(t) = xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty),$$

y por la igualdad que verifica f para el par (tx, ty) tendremos

$$g'(t) = \frac{1}{t}\left(txf_x(tx, ty) + tyf_y(tx, ty)\right) = \frac{n}{t} f(tx, ty) = \frac{n}{t} g(t).$$

Luego $g(t)$ es una función que verifica la ecuación

$$g'(t) = \frac{n}{t} g(t).$$

No es difícil convencerse de que las únicas funciones que satisfacen esta regla son

$$g(t) = ct^n$$

donde c es una constante (con respecto a t). Para determinar esa constante ponemos $t = 1$ y llegamos a que

$$f(tx, ty) = g(t) = t^n f(x, y).$$

Verificar que las siguientes funciones satisfacen la fórmula de Euler (cf. Ejercicio **426***) y encontrar en cada caso su grado:*

427 $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$.

428 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

429 $f(x,y) = (x+y)^3$.

430 $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Sección 2.5

Derivación implícita. Polinomio de Taylor.

Hallar las derivadas y' que se piden en cada caso mediante derivación implícita:

431 $y^3x + y^2x^2 - 1 = 0$, *en el punto* $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$.

432 $x^y + y^x = 2$, *en el punto* $(1,1)$.

433 $x^2 - 3xy - y^2 = 3$, *en el punto* $(1,-1)$.

434 $y + e^x \log y = 1$, *en el punto* $(2,1)$.

Encontrar la ecuación del plano tangente en el punto dado al grafo de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por

435 $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 3 = 0$ *en* $(-1,1,1)$.

436 $xe^y + ye^z + ze^x = 0$ *en* $(0,0,0)$.

437 *Hallar las derivadas parciales respecto de x e y de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por*

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}$$

en un entorno del punto $(0, 0, \frac{\pi}{2})$.

438 *Calcula implícitamente la derivada segunda de y respecto de x en el punto $(1,1)$ si*

$$\frac{\pi}{4} \log \sqrt{x^2+y^2} = \log \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

439 *Dada la función $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$, se pide:*

(a) *Halla el polinomio de Taylor de grado dos en el punto* $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

(b) *Escribir la ecuación del plano tangente al grafo de* f *en el mismo punto.*

Encontrar el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f *en el punto indicado para los siguientes casos:*

440 $f(x, y) = \frac{1}{a+x^2+y^2}$ *en* $(0, 0)$.

441 $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos y$, *en* $(0, 0)$.

442 $f(x, y, z) = \frac{ze^x}{\sqrt{xy}}$ *en* $(1, 1, 0)$.

443 $f(x, y) = e^{x+y^2}$ *en* $(0, 0)$.

444 *Usando el polinomio de Taylor de primer orden en el punto adecuado, encontrar una aproximación del valor de* $f(0{,}97, 0{,}05)$ *para*

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{1+y}.$$

Solución 444:

El polinomio de Taylor de primer orden de una función en el punto x_0 es

$$P_1(x; x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Puesto que

$$f(1, 0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \nabla f(1, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$

entonces

$$P_1(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}y.$$

Evaluando $P_1(0{,}97, 0{,}05)$ obtendremos un valor aproximado al valor de $f(0{,}97, 0{,}05)$. En este caso,

$$P_1(0{,}97, 0{,}05) = \frac{\pi}{4} - 0{,}04 = 0{,}74539,$$

mientras que $f(0{,}97, 0{,}05) = 0{,}74581$.

445 *Se considera la ecuación* $y - 2z + 2 = 2z(x + y)$.

(a) *Probar que se puede despejar* $z = g(x, y)$ *como función implícita de* x *e* y *en un entorno de* $(0, 0, 1)$.

(b) *Da un desarrollo de Taylor de orden 2 en un entorno de* $(0, 0)$ *para la función* g *del apartado anterior.*

Solución 445:

(a) Si derivamos implícitamente la ecuación que pretende definir z en términos de x e y, respecto a x e y respectivamente, llegamos a

$$-2\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{dz}{dx}(x + y) + 2z, \quad 1 - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial y}(x + y) + 2z,$$

de donde despejando $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\,z}{1 + x + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 2y}{2(1 + x + y)}.$$

En el punto $(0, 0, 1)$, dichas derivadas parciales son -1 y $-\frac{1}{2}$. En particular los denominadores de las expresiones anteriores no se anulan, y esto significa que efectivamente la ecuación que relaciona x, y y z, define a z como función de x e y, al menos en un entorno del origen $z = g(x, y)$.

(b) Para el desarrollo de Taylor de orden 2 en el origen de la función $z = g(x, y)$ necesitamos las derivadas parciales hasta orden 2 en dicho punto. En el apartado anterior hemos encontrado que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -\frac{1}{2}.$$

Para las derivadas segundas es preciso seguir derivando implícitamente en las expresiones ya derivadas una vez del apartado anterior o bien derivar directamente a partir de las ex-

presiones para $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$. Así se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{2}{1+x+y}\frac{\partial g}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{1+x+y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -\frac{2}{1+x+y}\frac{\partial g}{\partial y},\end{aligned}$$

y particularizando en $(0,0)$, teniendo en cuenta que ya conocemos las derivadas primeras, se obtiene

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)=2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)=\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)=1.$$

De este modo el polinomio de Taylor solicitado será

$$P_2(x) = 1 - x - \frac{y}{2} + x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}y^2.$$

446 *Demostrar que en un entorno de* $(0,0)$, *la ecuación*

$$e^{xy} + x + y^2 = 1$$

define a x *como función implícita de* y. *Calcular* $x''(0)$.

Solución 446:

Derivando implícitamente respecto a y en la igualdad se llega a

$$e^{xy}(x'y + x) + x' + 2y = 0$$

y despejando x'

$$x' = -\frac{xe^{xy} + 2y}{1 + ye^{xy}}.$$

En el punto $(0,0)$ se calcula inmediatamente que $x'(0) = 0$, y en consecuencia, la igualdad en cuestión define x como función implícita de y en un entorno del origen. Para calcular la segunda derivada en 0, volvemos a derivar con respecto a y en la ecuación ya derivada una vez, para encontrar

$$x''(1+ye^{xy}) + x'(e^{xy} + ye^{xy}(x'y+x)) + x'e^{xy} + xe^{xy}(x'y+x) + 2 = 0.$$

Despejando x'' con un poco de cuidado llegamos a

$$x'' = -\frac{(x')^2 y^2 e^{xy} + 2x'(1+xy)e^{xy} + x^2 e^{xy} + 2}{1 + ye^{xy}},$$

y particularizando en $(0,0)$, teniendo en cuenta que $x'(0) = 0$, nos queda $x''(0) = -2$.

447 *Demostrar que en un entorno del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ *la ecuación* $z^3 y + zx^2 = 1$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y*. Hallar el plano tangente a la superficie que define* z *en el punto* $(1, 0)$.

Sección 2.6

Extremos

Encontrar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar su naturaleza:

448 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

449 $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$.

450 $f(x,y) = \frac{1}{x} e^{x \operatorname{sen} y}$.

451 $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

452 $f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$.

453 $f(x,y) = 6000 + 6x^3 - 36xy + 3y^2$;

454 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

455 $f(x,y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1+4y^2)}$.

456 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

457 $f(x,y,z) = x^4 - x^2 y^2 + y^4 + 4x^2 - 6y^2$.

Solución:

450 Para determinar los puntos críticos y su naturaleza para una función necesitamos resolver el sistema $\nabla f = 0$ y estudiar el carácter de $D^2 f$, por lo que precisamos calcular explícitamente todas las derivadas hasta orden dos. Con un poco de paciencia en los cálculos obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} e^{x \operatorname{sen} y} \left(\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x \operatorname{sen} y} \cos y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x} e^{x \operatorname{sen} y} \left[\left(\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} \right],$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x \operatorname{sen} y} \cos y \operatorname{sen} y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x \operatorname{sen} y} \left(x \cos^2 y - \operatorname{sen} y \right).$$

Para resolver $\nabla f = 0$, como la exponencial no puede anularse en ningún caso, y teniendo en cuenta el excluir $x = 0$, las soluciones del sistema se obtienen para

$$\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = 0, \quad \cos y = 0,$$

de donde encontramos que $x = \operatorname{sen} y = 1$ o $x = \operatorname{sen} y = -1$. En definitiva, tenemos los puntos críticos

$$(1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad (-1, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Estudiando la matriz hessiana en estas dos familias de puntos se llega a

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son no definidas, y en consecuencia, todos los puntos críticos sin excepción son puntos de silla. Véase un boceto del grafo en la Figura 10.

455 Al igual que en el apartado anterior calculamos todas las

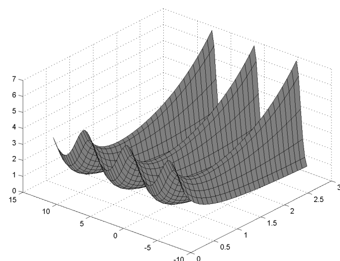


Figura 10. Función $\frac{1}{x}e^{x \operatorname{sen} y}$

derivadas hasta orden dos. Así obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12\frac{x^3 - x^2 - 2x}{1+4y^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -8\frac{y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{(1+4y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{36x^2 - 24x - 24}{1+4y^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -96\frac{y(x^3 - x^2 - 2x)}{(1+4y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8\frac{(1-12y^2)(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{(1+4y^2)^3}.$$

Los puntos críticos se determinan encontrando las soluciones del sistema

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 12\frac{x^3 - x^2 - 2x}{1+4y^2},$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{3}\frac{y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{(1+4y^2)^2}.$$

Este sistema es equivalente a

$$x^3 - x^2 - 2x = 0, \quad y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18) = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son 0, 2 y -1. Como ninguna de éstas es solución del paréntesis de la segunda, concluimos que los únicos puntos críticos son $(0,0)$, $(2,0)$ y $(-1,0)$.

Estudiamos la naturaleza de estos tres puntos críticos a través de la matriz hessiana de derivadas segundas. En concreto

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -144 \end{pmatrix}, \quad H(2,0) = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 112 \end{pmatrix},$$
$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -104 \end{pmatrix}.$$

De este modo, la primera matriz es definida negativa y el punto $(0,0)$ es un máximo (relativo), la segunda es definida positiva y el punto $(2,0)$ es un mínimo (local), y la tercera es indefinida y el punto $(-1,0)$ es un punto de silla. Véase un boceto del grafo de esta función en la Figura 11.

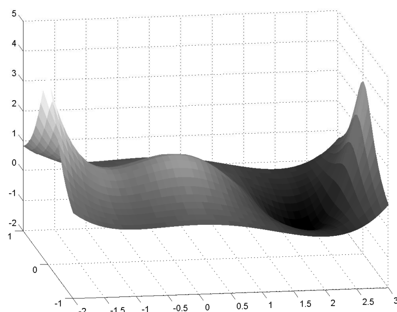


Figura 11. Función $\frac{3x^4-4x^3-12x^2+18}{12(1+4y^2)}$

458 *Encontrar los puntos críticos de $f(x,y) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2y^3}{2} + \frac{y^2}{2}$ y clasificar los que no sean degenerados.*

459 *Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = e^{x^2}(x^4 + y^4).$$

Solución 459:

Determinamos en primer lugar las derivadas parciales primeras y segundas de f. Con un poco de calma y cuidado, encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2}\left(2x^5 + 4x^3 + 2xy^4\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2} 4y^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2}\left(4x^6 + 18x^4 + 4x^2y^4 + 12x^2 + 2y^4\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy^3 e^{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 e^{x^2}.$$

El sistema de puntos críticos es, debido a que la exponencial jamás puede anularse,

$$2x^5 + 4x^3 + 2xy^4 = 0, \quad 4y^3 = 0.$$

Se obtiene inmediatamente como única solución el origen $(0,0)$. Ahora bien, la matriz hessiana de f en este punto es la matriz nula, de modo que se trata de un punto degenerado.

Para poder decidir en este caso la naturaleza del punto crítico en el origen, consideramos un vector director unitario

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

y la función

$$g_{\mathbf{n}}(t) = f(tn_1, tn_2) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) e^{n_1^2 t^2} t^4.$$

Se trata de decidir la naturaleza del punto crítico para $t = 0$ dependiendo del vector director $\mathbf{n}$. Para calcular las sucesivas derivadas de $g_{\mathbf{n}}(t)$ podemos valernos de la regla de Leibnitz para las derivadas de un producto que en este caso afirma

$$g_{\mathbf{n}}^{(k}(t) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) \sum_{j=0}^{k} (t^4)^{(j} \left(e^{n_1^2 t^2}\right)^{(k-j}.$$

Cuando el orden de derivación del polinomio t^4 es menor que cuatro, tales derivadas para $t = 0$ se anulan. De este modo la primera derivada no nula podría ser la cuarta, pero no ninguna anterior.

Veamos la fórmula anterior para $k = 4$

$$g_{\mathbf{n}}^{(4}(t) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) \sum_{j=0}^{4} (t^4)^{(j} \left(e^{n_1^2 t^2}\right)^{(4-j}.$$

Cuando evaluamos en $t = 0$, por la razón apuntada antes todos los términos se anulan salvo, posiblemente, el correspondiente a $j = 4$ en el que en realidad obtenemos el valor 24. En consecuencia

$$g_{\mathbf{n}}^{(k}(0) = 0, \quad j \leq 3, \qquad g_{\mathbf{n}}^{(4}(0) = 24.$$

Esta conclusión es independiente del vector $\mathbf{n}$, de modo que concluimos que el origen es un mínimo para f. Véase la Figura 12

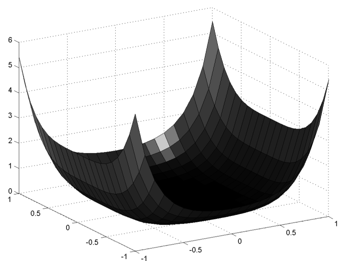


Figura 12. Función $e^{x^2}(x^4 + y^4)$

Determinar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

460 $f(x, y) = x^3 + y^4 - y^2$.

461 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

462 $f(x, y) = \log(2 + \operatorname{sen}(xy))$.

463 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$.

464 $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}y^3$.

465 $f(x,y) = 3x^4 + 6x^2y - 6x^2 + 4y^3 - 6y^2.$

466 $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y);$

467 $f(x,y) = x^3y^2(x+y-24);$

468 $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x^2y^2} \sqrt{1+t}\,dt.$

Solución 468:

Mediante el teorema fundamental del Cálculo, podemos calcular sin dificultad las derivadas parciales de esta función f. Así

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2\sqrt{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2\sqrt{1+x^2y^2} + \frac{2x^2y^4}{\sqrt{1+x^2y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\sqrt{1+x^2y^2} + \frac{2y^3x^3}{\sqrt{1+x^2y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2\sqrt{1+x^2y^2} + \frac{2y^2x^4}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

De este modo se obtiene inmediatamente que todos los puntos de los dos ejes coordenados son puntos críticos, para los cuales la matriz hessiana de derivadas segundas es degenerada.

Podríamos por tanto hacer un estudio más detallado en cada punto crítico mediante un vector director. Sin embargo en este caso es muy sencillo razonar que todos los puntos críticos encontrados son en realidad puntos de mínimo. En efecto, obsérvese que el límite superior de la integral que define f es x^2y^2 que es siempre no negativo. Como además el integrando $\sqrt{1+t}$ es positivo, resulta que el mínimo (en realidad global) de f ocurre cuando $x^2y^2 = 0$, es decir en los puntos críticos. Véase la Figura 13.

Encuentra los extremos de las funciones que se dan a continuación:

469 $f(x,y) = \displaystyle\int_{x+y}^{x-y} \frac{1}{1+t^6}\,dt.$

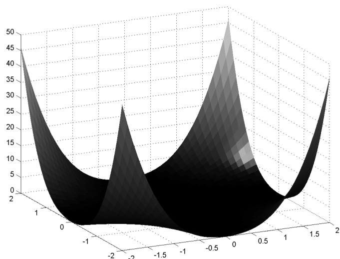


Figura 13. Función del Ejercicio **468**

470 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}(1-s^2)^{3/2}\,ds.$

Solución 470:

Las derivadas parciales de f se encuentran sin grandes dificultades a través del teorema fundamental del Cálculo y un poco de cuidado en los cálculos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(1-x^2y^2\right)^{3/2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\left(1-x^2y^2\right)^{3/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-3xy^3\left(1-x^2y^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(1-x^2y^2\right)^{3/2}-3yx^2\left(1-x^2y^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-3yx^3\left(1-x^2y^2\right)^{1/2}.$$

El sistema de puntos críticos es

$$y\left(1-x^2y^2\right)^{3/2}=0,\quad x\left(1-x^2y^2\right)^{3/2}=0.$$

Las posibles soluciones son el origen $(0,0)$ y los puntos tales que $x^2y^2=1$. Nótese que el dominio de f es precisamente el conjunto de puntos (x,y) tales que $x^2y^2\le 1$, pues en otro caso el integrando no está definido. La matriz hessiana de f en $(0,0)$ se encuentra

rápidamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es no definida de modo que el origen es un punto de silla. Con respecto a la otra posibilidad vislumbramos dos casos según si $xy = 1$ o $xy = -1$. En la primera situación observamos que el límite superior de integración en la definición de f es máximo y como el integrando es no negativo, la función f alcanzará en tales puntos su máximo. Por la misma razón, cuando $xy = -1$ tendremos puntos de mínimo.

471 *Dados los puntos* $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, 0)$, *encontrar el punto que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias a estos cuatro puntos.*

472 *¿Para qué valores de* k *la función* $f(x, y) = kx^2 + 5xy + 4y^2$ *tiene un mínimo relativo en* $(0, 0)$*?*

473 *Una empresa estima que la inversión en publicidad genera unos beneficios dados por* $x^3y^5z^6$*, donde* x *es el dinero invertido en publicidad escrita,* y *en publicidad radiofónica y* z *en publicidad televisiva. Encontrar la relación entre* x*,* y *y* z *que maximiza los beneficios netos (i.e. la diferencia entre beneficios obtenidos y gastos realizados).*

474 *(Método de los mínimos cuadrados) Dado un conjunto de pares de datos* $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$*, se trata de determinar la función lineal* $y = a + bx$ *que mejor se ajusta a estos datos. El criterio para determinar* a *y* b *consiste en minimizar la suma del cuadrado de los errores, es decir, buscamos el mínimo de la función*

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2.$$

Probar que el mínimo se obtiene para

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j}{\displaystyle n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

475 $f(x, y, z) = x - y + z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

476 $f(x, y) = 3x + 2y, \qquad 2x^2 + 3y^2 = 3.$

477 $f(x, y) = xe^{xy}, \qquad x^2 + y = 0.$

478 $f(x, y) = x^y, \qquad x > 0, y > 0, xy = 1.$

479 $f(x, y, z) = x^2 + 2yz, \qquad x^2 + y^2 = z^2.$

480 $f(x, y, z) = xyz, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$

Solución:

476 Observemos en primer lugar que la restricción $2x^2 + 3y^2 = 3$ representa una elipse en el plano, centrada en el origen, que es un conjunto compacto (cerrado y acotado). En consecuencia, el Teorema de Weierstrass asegura que el máximo y el mínimo de cualquier función continua debe alcanzarse en dicha elipse. Por otra parte, el Teorema de los multiplicadores de Lagrange asegura que los extremos restringidos están entre los puntos del conjunto que satisfacen $\nabla f + \sum_i \lambda_i \nabla g_i = 0$, donde f es la función objetivo y g_i las restricciones de igualdad. Así, mediante un multiplicador λ (obsérvese que hay sólo una restricción) las ecuaciones que nos permiten determinar tales puntos extremos son

$$3 + 4\lambda x = 0, \quad 2 + 6\lambda y = 0.$$

junto con la restricción dada. En particular λ no puede anularse y, en este caso,

$$x = -\frac{3}{4\lambda}, \quad y = -\frac{1}{3\lambda}.$$

Llevando estas expresiones a la restricción, y después de simplificar, encontramos los dos valores posibles para el multiplicador

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{35}{72}}.$$

En consecuencia el máximo se alcanza en

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{72}{35}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{72}{35}}\right)$$

y el mínimo en

$$\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{72}{35}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{72}{35}}\right).$$

477 En este caso, la restricción que debe respetarse permite despejar "limpiamente" y en función de x, de modo que llevando $y = -x^2$ a la función f obtenemos la función de una sola variable

$$g(x) = xe^{-x^3}.$$

Encontraremos por tanto los extremos de esta función, y los extremos para f corresponderán a los puntos $(x, -x^2)$ siendo x un punto extremo para g. La ecuación para los puntos críticos de g es

$$e^{-x^3}(1 - 3x^3) = 0,$$

que tiene como única solución $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Además se debe tratar de un máximo pues

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty,$$

pero $g(x) > 0$ si $x > 0$. El mínimo no se alcanza $(-\infty)$. En consecuencia el punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$$

es un punto de máximo para f sujeto a la restricción $y + x^2 = 0$, y el mínimo al ser $-\infty$ no se alcanza. Nótese que la restricción es una parábola que es una curva no acotada.

480 Obsérvese en primer lugar que completando cuadrados en la ecuación que expresa la restricción se obtiene

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1,$$

de modo que se trata de la esfera de radio 1 centrada en el punto $(1, -1, 0)$. Es por tanto una región limitada y la función continua $f(x, y, z) = xyz$ alcanza sus dos valores extremos, máximo y mínimo, en dicha región.

Introduciendo un multiplicador λ asociado a la restricción de igualdad que debemos respetar, las ecuaciones que debemos resolver para detectar dichos valores extremos son

$$yz + \lambda 2(x-1) = 0, \quad xz + \lambda 2(y+1) = 0, \quad xy + \lambda 2z = 0,$$

junto con la propia ecuación que expresa la restricción. Si multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, concluimos que

$$xyz = -2\lambda x(x-1) = -2\lambda y(y+1) = -2\lambda z^2.$$

Por lo tanto

$$\lambda\left(x^2 - x - y^2 - y\right) = 0, \quad \lambda\left(x^2 - x - z^2\right) = 0.$$

La primera ecuación puede factorizarse como

$$\lambda(x+y)(x-y-1) = 0,$$

lo que nos conduce a las tres posibilidades siguientes:

(I) $\lambda = 0$. En este caso dos de las variables deben anularse. El caso $x = y = 0$ es imposible por la restricción, pero los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$ si son admisibles. Estos dos son por tanto soluciones.

(II) $y = x - 1$, $z^2 = x^2 - x$. Llevando estas expresiones a la restricción llegamos a

$$3(x^2 - x) = 0$$

lo que supone $x = 0$ o $x = 1$. En cualquier caso $z = 0$, y volvemos a obtener los dos puntos anteriores.

(III) $y = -x$, $z^2 = x^2 - x$. Procediendo del mismo modo encontramos

$$3x^2 - 5x + 1 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Como $x^2 - x = z^2$ y en particular la expresión $x^2 - x$ debe ser no negativa, esta condición excluye el signo negativo delante de la raíz. Las dos posibilidades que obtenemos son

$$\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, -\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{9}} \right).$$

De estas dos posibilidades el signo negativo para z corresponde al punto de máximo con valor

$$\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right)^2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{9}},$$

y el signo positivo corresponde al punto de mínimo con el mismo valor anterior cambiado de signo.

481 *Diseñar una lata cilíndrica con una tapa para contener un litro de agua, usando la mínima cantidad de metal.*

482 *Hallar el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular contenido en el primer octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ con un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano $x + y + z = 1$.*

483 *Hallar la distancia mínima entre el punto $(0,1)$ y la parábola $x^2 = 4y$.*

484 *Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x - 1$.*

485 *Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujetos a las restricciones $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.*

Solución 485:

En este caso tenemos dos restricciones que respetar y por tanto debemos introducir dos multiplicadores λ y μ. De este modo el sistema que debemos resolver es

$$1 + 2\lambda x + 2\mu = 0, \quad 1 - 2\lambda y = 0, \quad 1 + \mu = 0,$$

junto con las dos restricciones. Inmediatamente obtenemos $\mu = -1$ y por tanto

$$2\lambda x = 1, \quad 2\lambda y = 1,$$

de donde concluimos que $x = y$. Pero nótese que entonces la primera restricción $x^2 - y^2 = 1$ es imposible de cumplir. Esto significa que el sistema que debemos resolver no admite ninguna solución, y en particular, esto supone que la región del espacio determinada por las dos restricciones no puede ser acotada de modo que los valores de la función f crecen indefinidamente hacia $+\infty$ sobre puntos admisibles y decrecen hacia $-\infty$. En efecto, si tomamos $y \sim -x$ pero respetando $x^2 - y^2 = 1$ (lo cual supone $x^2 \to \infty$) y $z = 1 - 2x$, la función f vale, aproximadamente, $1 - 2x$, de modo que si $x \to \pm\infty$ vemos que los valores de f crecen o decrecen indefinidamente. Véase la siguiente Figura 14 representando a la región factible.

486 *Encontrar el punto más cercano al origen de entre todos los de la superficie de ecuación $z = \frac{1}{2}(x-2)^2 + y^2 - 1$. (Indicación: en vez de*

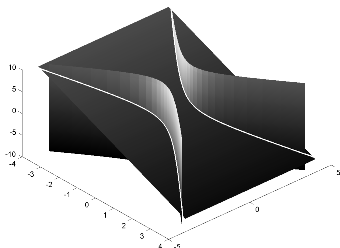


Figura 14. Región factible en el Ejercicio **485**

la distancia al origen, es más conveniente minimizar la distancia al cuadrado).

487 *Encontrar los puntos de la superficie $xyz = 1$ más próximos al origen.*

488 *Encontrar los puntos más lejanos al origen de entre todos los que satisfacen la condición $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ (Indicación: esta ecuación representa una superficie acotada).*

489 *Hallar la mínima distancia del origen a la superficie $x^2+y^2+z = 3$.*

490 *Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x+2y+3z$ sometida a la restricción $xy + xz + yz = 1$.*

Solución 490:

Las ecuaciones que debemos resolver son

$$1 + \lambda(y + z) = 0, \quad 2 + \lambda(x + z) = 0, \quad 3 + \lambda(x + y) = 0,$$

junto con la restricción

$$xy + xz + yz = 1.$$

Restando la primera de la segunda se llega a

$$1 + \lambda(x - y) = 0,$$

que junto con la tercera conduce a

$$2 + \lambda x = 0, \quad 1 + \lambda y = 0,$$

de donde concluimos que x e y no pueden anularse, y además $2y = x$. Además llevando esta información a las dos primeras ecuaciones deducimos que $z = 0$. Finalmente para la restricción obtenemos

$$2y^2 = 1, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm\sqrt{2}, \quad z = 0.$$

Las posibles soluciones son por tanto

$$\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Sin embargo ninguna de estas soluciones corresponde a los valores extremos. Para convencernos de esto basta con tomar $z = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, que son puntos que satisfacen la restricción. Sobre estos puntos el valor de f es $x + \frac{2}{x}$. Cuando x es positivo pero próximo a cero, esta última expresión tiene un valor positivo muy grande, mientras que si x es próximo a cero pero negativo tiene un valor muy grande pero negativo. Esto significa que el valor máximo es $+\infty$ (sin límite) y el mínimo $-\infty$ y los valores extremos no se alcanzan.

491 *Sabiendo que la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ representa una superficie limitada en $\mathbb{R}^3$, encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^4 y + z^4$ sobre dicha superficie.*

492 *Dada la función $F(x) = x(x^2 - 1)$, considera la función de tres variables $f(t, x, y) = tF(x) + (1 - t)F(y)$. Encuentra los puntos críticos de f bajo la restricción $tx + (1 - t)y = a$ donde a es un número dado fijo.*

Solución 492:

De forma explícita, la función f es

$$f(t, x, y) = t(x^3 - x) + (1 - t)(y^3 - y),$$

de modo que el sistema a resolver se escribe

$$\begin{aligned}(x^3-x)-(y^3-y)+\lambda(x-y)=&0,\\ t(3x^2-1)+\lambda t=&0,\\ (1-t)(3y^2-1)+\lambda(1-t)=&0,\\ tx+(1-t)y=&a.\end{aligned}$$

Si factorizamos en las tres primeras ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2-1+\lambda)=&0,\\ t(3x^2-1+\lambda)=&0,\\ (1-t)(3y^2-1+\lambda)=&0,\\ tx+(1-t)y=&a.\end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones tienen forma de producto que debe anularse, de modo que podemos organizar todas las posibles soluciones examinando los $2^3=8$ casos posibles según se anulen en cada ecuación uno u otro paréntesis.

(I) $x=y, t=0, 1-t=0$: este caso es obviamente imposible;

(II) $x=y$, $t=0$, $3y^2-1+\lambda=0$: la restricción impone $x=y=a$, y este es un posible punto crítico;

(III) $x=y$, $3x^2-1+\lambda=0$, $t=1$: este caso es análogo al anterior pues se obtiene el punto $x=y=a$, $t=1$;

(IV) $x=y$, $3x^2-1+\lambda=0$ pero t distinto de 0 y 1: la solución en este caso es $x=y=a$, y cualquier valor de t, en particular, los dos casos anteriores están incluidos en éste;

(V) $x^2+xy+y^2-1+\lambda=0$, $t=0$, $1-t=0$: este caso es también imposible;

(VI) $x^2+xy+y^2-1+\lambda=0$, $t=0$, $3y^2-1+\lambda=0$: de la restricción se obtiene $y=a$ y en consecuencia el valor de x debe ser tal que

$$x^2+ax-2a^2=0,$$

luego $x=a$ o $x=-2a$, y los dos puntos críticos son $t=0$, $y=a$, $x=a$ o $x=-2a$;

(VII) $x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda = 0$, $3x^2 - 1 + \lambda = 0$, $t = 1$: este caso es análogo al anterior intercambiando los papeles de x e y, por tanto se obtienen los puntos $t = 1$, $x = a$, $y = a$ o $y = -2a$;

(VIII) $x^2+xy+y^2-1+\lambda = 0$, $3x^2-1+\lambda = 0$, $3y^2-1+\lambda = 0$: estas tres ecuaciones suponen

$$x^2 + y^2, \quad 3x^2 = x^2 + xy + y^2,$$

por tanto $x^2 = xy$. Así deducimos que $x = y$ y volvemos a obtener los puntos críticos anteriores. Si a es cero, la posibilidad $x = 0$ sería también posible pero, incluso este caso estaría incluido en los casos anteriores.

En resumidas cuentas, los puntos críticos son

$$(t, a, a), \quad (0, -2a, a), \quad (1, a, -2a),$$

para cualquier valor de t.

493 *Encontrar las dimensiones de una caja de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 1.*

494 *Dados los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(1, 1, -2)$ determinar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 = z + \frac{5}{2}$ que forman con A y B:*

(a) un triángulo de área mínima;

(b) un triángulo de área máxima.

(Indicación: el área de un triángulo de vértices A, B, C viene dada por $\dfrac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2}$. El óptimo no cambia si en lugar de usar la función $\|\cdot\|$ se considera la función $2\|\cdot\|^2$.)

Solución 494: Si C designa un punto genérico (x, y, z) de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = z + \frac{5}{2}$, los vectores AB y AC son, respectivamente,

$$(0, 1, 0), \quad (x - 1, y, z + 2);$$

en consecuencia $\|AB \times AC\|^2$ será $(x-1)^2 + (z+2)^2$. Por tanto, nos interesa encontrar los valores máximo y mínimo de la función

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 + (z+2)^2$$

bajo la restricción

$$x^2 + y^2 = z + \frac{5}{2}.$$

Nótese en primer lugar que tomando x todo lo grande que deseemos, $y = 0$ y $z = x^2 - 5/2$ el valor de la función anterior en estos puntos será también todo lo grande que queramos, lo cual significa que en realidad podemos hacer el área de un tal triángulo todo lo grande que deseemos: no existe el máximo. Por otro lado el área de un triángulo no puede ser negativa, es decir, está acotada, y como cuando cualquier coordenada del punto C tiende a infinito el área del triángulo también se hace indefinidamente grande, concluimos que sí existe un triángulo de área mínima que se encuentra como solución a las ecuaciones de los puntos críticos.

Para encontrar el triángulo de área mínima, debemos plantear el sistema de puntos críticos, que es

$$\begin{aligned} x - 1 + \lambda 2x &= 0, \\ \lambda 2y &= 0, \\ z + 2 - \lambda &= 0, \\ x^2 + y^2 &= z + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

La segunda ecuación nos permite distinguir los dos casos $\lambda = 0$, $y = 0$. El primero conduce a $x = 1$, $z = -2$, y de aquí la ecuación de la superficie impone $y^2 = -1/2$ que es lógicamente imposible. La segunda posibilidad $y = 0$ lleva a

$$x = \frac{1}{1 + 2\lambda}, \quad z = \lambda - 2,$$

y llevando estas expresiones a la ecuación de la superficie encontramos

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4},$$

de donde

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2/3}},$$

y

$$x = 2^{-1/3}, \quad y = 0, \quad z = \frac{3 + 2^{1/3}}{2}.$$

Esta única solución corresponde al triángulo de área mínima.

495 *Encontrar la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *que pasa por el punto* $(1, 4)$ *y tiene área máxima. (Ayuda: el área de la elipse es* πab*, con* $a, b > 0$*).*

496 *Encuentra el valor máximo que puede tomar la función* $g(x, y, z) = xyz$ *bajo las restricciones* $x + y + z = 1$*,* $x, y, z \geq 0$*. Concluir que si* $a, b, c \geq 0$ *entonces*

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Solución 496:

Es bastante claro que la función $g(x, y, z) = xyz$ no puede crecer indefinidamente si las variables x, y, z están limitadas de modo que $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Dicho valor máximo podemos determinarlo resolviendo el sistema de puntos críticos

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0, \\ xz + \lambda &= 0, \\ xy + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, concluimos inmediatamente que $\lambda x = \lambda y = \lambda z$, y como λ no puede anularse (en cuyo caso $xyz = 0$ correspondería al mínimo, no al máximo que debe ser estrictamente positivo) debemos tener $x = y = z$, y debido a la restricción, $x = y = z = \frac{1}{3}$ es el punto de máximo.

Sean ahora a, b, c tres números no negativos cualesquiera dados. Consideremos cualquier punto (x', y', z') tal que

$$x' + y' + z' = a + b + c, \quad x', y', z' \geq 0.$$

El punto (x, y, z) con

$$x = \frac{x'}{a+b+c}, \quad y = \frac{y'}{a+b+c}, z = \frac{z'}{a+b+c}$$

es tal que

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0.$$

Por la primera parte del problema $xyz \leq \frac{1}{27}$, es decir,

$$x'y'z' \leq \frac{(a+b+c)^3}{27},$$

cualesquiera que sean x', y', z' en las condiciones anteriores; en particular para $x' = a$, $y' = b$, $z' = c$ tendremos

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27},$$

de lo que se deduce la conclusión deseada.

497 *Hallar, de entre todos los números a y b que verifican la relación $(a-2)^2 + (b-2)^2 = 1$, aquéllos que hagan menor el máximo de la función $f(x) = xe^{-x/(a+b)}$ en $[0, +\infty)$.*

498 *Encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.*

Solución 498:

Puesto que tratamos de localizar los extremos absolutos de la función f sobre una región cerrada y acotada, bastará con encontrar los puntos críticos que den el mayor y menor valor para f. Introduciendo el multiplicador oportuno, los puntos críticos resuelven el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 - 2\lambda x &=& 0 \\ 3y^2 - 2\lambda y &=& 0 \\ 3z^2 - 2\lambda z &=& 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &=& 4 \end{array} \iff \begin{array}{lrcl} (1) & x(3x - 2\lambda) &=& 0 \\ (2) & y(3y - 2\lambda) &=& 0 \\ (3) & z(3z - 2\lambda) &=& 0 \\ (4) & x^2 + +y^2 + z^2 &=& 4 \end{array}$$

Casos:

(I) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. No se verifica (4).

(II) $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$. De (3) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}z$. De (4) se llega a $z^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_1 = (0, 0, 2)$ y $P_2 = (0, 0, -2)$.

(III) $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$. De (2) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}y$. De (4) se llega a $y^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_3 = (0, 2, 0)$ y $P_4 = (0, -2, 0)$.

(IV) $x \neq 0$, $y = 0$, $z = 0$. De (1) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}x$. De (4) se llega a $x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_5 = (2, 0, 0)$ y $P_6 = (-2, 0, 0)$.

(V) $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. De (2) y (3) se deduce $y = z$. De (4) se llega a $2y^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_7 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $P_8 = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(VI) $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$. De (1) y (3) se deduce $x = z$. De (4) se llega a $2x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_9 = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ y $P_{10} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

(VII) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$. De (1) y (2) se deduce $x = y$. De (4) se llega a $2x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_{11} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ y $P_{12} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

(VIII) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. De (1), (2) y (3) se deduce $x = y = z$. De (4) se llega a $3x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_{13} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ y $P_{14} = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

El menor valor de f se da en los puntos P_2, P_4 y P_6 y el mayor se halla en P_1, P_3 y P_5.

499 *Sean $a_1, \ldots, a_n$, n números positivos dados. Encontrar $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y hagan máximo $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.*

500 *Una empresa dedicada a la producción de motores eléctricos estima que el coste diario de producción de x unidades del motor I e y unidades del motor II viene dado por la función $2x^2 + y^2 - xy$. ¿Cuántos motores de cada tipo debe producir para minimizar el coste, si diariamente debe producir un total de 96 motores?*

501 *El material con el que se fabrica la base de una caja rectangular abierta cuesta a razón de* 3€/m^2. *El material para fabricar los laterales cuesta* 1€/m^2. *Encuentra las dimensiones de la caja:*

(a) *de mayor volumen que puede fabricarse con* 36€;

(b) *de menor precio que tenga un volumen superior a* 1m^3.

Solución 501:

El volumen de una tal caja es $V(x, y, z) = xyz$ mientras que el coste de la misma será $C(x, y, z) = 3xy+2xz+2yz$. Evidentemente debemos siempre exigir $x, y, z \geq 0$.

(a) Se trata de maximizar V bajo $C \leq 36$. Debemos distinguir dos situaciones: los puntos críticos de V (sin restricciones) que verifiquen la restricción del coste, y los puntos críticos de V bajo la restricción $C = 36$. El primer caso no conduce a ninguna solución lógica, por tanto esperamos conseguir la caja solicitada estudiando la segunda situación:

$$\begin{aligned} yz + \lambda(3y + 2z) &=0, \\ xz + \lambda(3x + 2z) &=0, \\ xy + \lambda(2y + 2x) &=0, \\ 3xy + 2xz + 2yz &=36. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, llegamos a la conclusión (después de descartar la posibilidad de que $\lambda = 0$)

$$3xy + 2xz = 3xy + 2yz = 2yz + 2xz.$$

Además, como el máximo buscado no puede corresponder a ninguna dimensión nula, de las igualdades anteriores deducimos que $x = y = \frac{2z}{3}$. Llevando estas expresiones a la restricción del coste, encontramos que

$$x = y = 2, \quad z = 3,$$

son las dimensiones de la caja solicitada.

(b) En este caso nos interesa minimizar C bajo $V \geq 1$, y de la misma manera debemos distinguir dos posibilidades: o bien la solución es un punto crítico de C sin restricciones pero que verifica la restricción; o bien se trata de un punto crítico de C bajo la condición $V = 1$. La primera posibilidad conduce al sistema

$$\begin{aligned} 3y + 2z =&0, \\ 3x + 2z =&0, \\ 2y + 2z =&0, \end{aligned}$$

cuya única solución es la trivial $(0, 0, 0)$ que no tiene significado geométrico. Por tanto la solución solicitada debe encontrarse en la segunda posibilidad. En este caso debemos resolver

$$\begin{aligned} 3y + 2z + \lambda yz =&0, \\ 3x + 2z + \lambda xz =&0, \\ 2y + 2z + \lambda xy =&0, \\ xyz =&1. \end{aligned}$$

Multiplicando por x la primera ecuación, por y la segunda y por z la tercera, deducimos que

$$3xy + 2xz = 3xy + 2yz = 2yz + 2xz,$$

y como en el caso anterior $x = y = \frac{2z}{3}$. La restricción del volumen nos permite determinar que la solución óptima pedida corresponde a

$$x = y = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}, \quad z = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}.$$

502 *Encontrar el valor mínimo de la función* $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ *en la intersección de los planos* $x + 2y = 3$ *y* $2y + 3z = 2$.

503 *Encontrar el punto de la intersección entre el paraboloide* $z = 4 - x^2 - y^2$ *y el plano* $x + 2y = 1$ *más cercano al origen.*

504 *Considerar la función*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + axy + \frac{y^4}{4}$$

donde $0 < a < 1$ *es una constante. Determinar el valor máximo y mínimo de* f *en el cuadrado* $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ *para* $a = 1/2^{30}$.

505 *Hallar los valores extremos de la función* $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 - x^2$ *en el disco* $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución 505:

Como de costumbre, existen dos posibilidades que debemos tener en cuenta: buscar los puntos críticos de f sin restricciones que verifican la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$, y los puntos críticos de f bajo la restricción $x^2 + y^2 = 1$. La primera conduce al sistema

$$\begin{aligned} 2x(4x^2 - 3y^2 - 1) &= 0, \\ 2y(-3x^2 + 4y^2) &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones, después de examinar las cuatro posibilidades que surgen según qué factor en cada ecuación se anula, son

$$(0,0), \quad (\pm\frac{1}{2}, 0), \quad \left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}\right).$$

Todas las combinaciones de signos son válidas. La segunda posibilidad conduce al sistema

$$\begin{aligned} 2x(4x^2 - 3y^2 - 1 + \lambda) &= 0, \\ 2y(-3x^2 + 4y^2 + \lambda) &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

De nuevo estudiando las cuatro posibilidades que surgen, llegamos a los puntos (sin repetir aquellos comunes con la posibilidad anterior)

$$(0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0).$$

Finalmente, debemos evaluar la función f en todos estos candidatos y decidir el valor máximo y mínimo: el máximo es 1 y se alcanza en los puntos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ y el mínimo es $-\frac{2}{7}$ y se alcanza en los cuatro puntos

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}\right).$$

506 *Determinar los extremos de la función* $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ *sobre la región determinada por las condiciones* $x^2 + y^2 \leq 4$ *e* $y \geq x + 1$.

507 *Encontrar al valor máximo de* $f(x, y) = xy$ *para todos los puntos del triángulo con vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

508 *Dada la función* $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2$ *y el conjunto*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq x + 1\},$$

encontrar el mayor y el menor valor de f *sobre* M*, sabiendo que el conjunto* M *es un compacto.*

Solución 508:

Puesto que se trata de un problema de mínimos con restricciones de desigualdad debemos proceder del modo siguiente:

En primer lugar calculamos los extremos habituales para f que caen dentro de M, es decir, resolvemos $\nabla f = 0$. Esto da,

$$\left.\begin{array}{c} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \in M,$$

como se observa claramente. Luego $P_1 = (0, 0, 0)$.

El segundo paso es calcular los extremos de f condicionados a la restricción $x^2 + y^2 = z$. Para ello consideramos el sistema de puntos críticos y resolvemos

$$\left.\begin{array}{c} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = z \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcll} x(3x - 2\lambda) & = & 0 & (1) \\ y(3y - 2\lambda) & = & 0 & (2) \\ 2z & = & -\lambda & (3) \\ x^2 + y^2 & = & z & (4) \end{array}\right\}$$

(I) Si $x = 0$, se deduce de (2) que, o bien $y = 0$, y entonces por (4) se obtiene $z = 0$ y de ahí obtenemos otra vez el punto $(0, 0, 0)$; o bien $y \neq 0$, y entonces $3y = 2\lambda$ que junto a (3) da $3y = -4z$. Sustituyendo en (4), $y^3 = -\frac{3}{4}y$, de donde tenemos que $y = -\frac{3}{4}$. Sale el punto $P_2 = (0, -\frac{3}{4}, \frac{9}{16}) \in M$.

(II) Si $x \neq 0$, entonces $3x = 2\lambda$ que junto a (3) $x^2 = -\frac{3}{4}x$. Se obtiene el punto $(-\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{16})$ que no pertenece a M. Si $y \neq 0$ entonces $3y = 2\lambda$ en cuyo caso $x = y = -\frac{4}{3}z$. Usando (4) obtenemos el punto $P_3 = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{9}{32}) \in M$.

A continuación calculamos los extremos sujetos a la restricción $z = x + 1$. Ahora el sistema a resolver es

$$\left.\begin{array}{rcll} 3x^2 - \lambda & = & 0 & (1) \\ 3y^2 & = & 0 & (2) \\ 2z + \lambda & = & 0 & (3) \\ x + 1 & = & z & (4) \end{array}\right\}$$

De (2), se obtiene $y = 0$. De (1) y (3) $\lambda = 3x^2 = -2z$, que junto con (4) da $3x^2 + 2x + 2 = 0$, que no tiene solución.

Por último resolvemos el problema con las dos restricciones $z = x^2 + y^2$ y $z = x + 1$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 - \lambda - 2\mu x & = & 0 \\ 3y^2 - 2\mu y & = & 0 \\ 2z - \lambda - \mu & = & 0 \\ x + 1 & = & z \\ x^2 + y^2 & = & z \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcll} 3x^2 - \lambda - 2\mu x & = & 0 & (1) \\ y(3y - 2\mu) & = & 0 & (2) \\ 2z + \lambda + \mu & = & 0 & (3) \\ x + 1 & = & z & (4) \\ x^2 + y^2 & = & z & (5) \end{array}$$

(I) Si $y = 0$, entonces de (4) y (5), $x^2 = x + 1$, de donde salen los puntos $P_4 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $P_5 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

(II) Si $y \neq 0$ entonces $3y = 2\mu$, de donde se obtiene un sistema sin solución.

Para finalizar, puesto que M es un compacto, bastará encontrar el valor de la función en cada punto para encontrar los puntos pedidos. Haciendo cálculos se obtiene que el máximo lo da P_4 y el mínimo lo da P_2.

509 *Considera la función* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ *y el conjunto* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leq 1\}$. *Calcula los valores máximo y mínimo de* f *en* M*, procediendo en dos pasos:*

(a) *Calcula los extremos de* f *bajo la restricción* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *que satisfacen además la condición* $z \leq 1$.

(b) *Encuentra los extremos de* f *bajo las dos restricciones* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$, *y compara los valores obtenidos con los del apartado anterior para concluir.*

510 *Se considera la función* $f(x,y) = x^2y^2 - 3xy - 4$. *Se pide:*

(a) *Obtener y clasificar los puntos críticos de* f.

(b) *Hallar los puntos críticos de* f *en el conjunto* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *y clasificarlos.*

(c) *Determinar un polinomio* $P(x,y)$*, de grado menor o igual que dos, de forma que*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y) - P(x,y)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0.$$

Solución 510:

(a) Planteamos el sistema de puntos críticos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2y - 3x = 0, \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} y(2xy-3) &= 0, \\ x(2xy-3) &= 0. \end{aligned}$$

Si $y = 0$ en la primera ecuación, entonces en la segunda ecuación $x = 0$. Se obtiene el punto $P = (0,0)$.
Si $2xy = 3$, se resuelven ambas ecuaciones, luego el conjunto de puntos $xy = \frac{3}{2}$ es solución del sistema.
Para clasificar los puntos críticos que nos han salido estudiamos la matriz hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy-3 \\ 4xy-3 & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es -9, y por tanto corresponde a una forma cuadrática indefinida. Es decir $(0,0)$ es un punto de silla. Por otra parte, en los puntos de la curva $xy = \frac{3}{2}$, H_f tiene determinante 0, por lo que el criterio de la derivada segunda no decide. No obstante podemos observar que

$$f(x,y) = x^2y^2 - 3xy - 4 = (xy - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 4 = (xy - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}.$$

Luego $f(x,y) \geq -\frac{25}{4}$. Teniendo en cuenta que el valor de f en los puntos $xy = \frac{3}{2}$ es justamente $-\frac{25}{4}$, deducimos que en todos los puntos de esa curva f alcanza un mínimo.

(b) Resolvemos usando multiplicadores de Lagrange. El sistema de puntos críticos para esta función es

$$\left.\begin{array}{c} 2xy^2 - 3y - 2\lambda x = 0 \\ 2x^2y - 3x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{cc} 2x(y^2 - \lambda) = 3y & (1) \\ 2y(x^2 - \lambda) = 3x & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{array}$$

De (1) y (2), si $x, y \neq 0$ se tiene $\frac{x}{y}(y^2 - \lambda) = \frac{y}{x}(x^2 - \lambda)$, y si $\lambda \neq 0$ resulta que $x^2 = y^2$.

Entonces, si $x = y$, en (3) se tiene que $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Salen los puntos

$$P_1 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}), \qquad P_2 = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}).$$

Por el contrario, si $x = -y$ entonces los puntos son

$$P_3 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}), \qquad P_4 = (-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}).$$

Por otra parte, si $x = 0$, $y = 0$ ó $\lambda = 0$, el sistema no posee solución.

Puesto que el conjunto $\{x^2+y^2=1\}$ es un compacto en $\mathbb{R}^2$, entonces la función alcanzará máximo y mínimo absolutos en él. Evaluando la función en los puntos obtenidos se tiene que P_1, P_2 son máximos, y P_3, P_4 mínimos.

(c) El polinomio que buscamos es precisamente el polinomio de Taylor de grado dos de f en el punto $(1,1)$, que además es el único que satisface la condición requerida. Teniendo en cuenta los cálculos para las derivadas primera y segunda que hemos realizado en el apartado primero, se obtiene

$$f_x(1,1)=-1,\quad f_y(1,1)=-1,$$
$$f_{xx}(1,1)=2,\quad f_{yy}(1,1)=2\quad f_{xy}(1,1)=1.$$

Por tanto

$$P(x,y)=x^2+y^2+xy-4x-4y-1.$$

511 *Dada la función $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$, hallar los puntos críticos de f en el conjunto*

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1\},$$

y clasificarlos.

Solución 511:

Tenemos dos posibilidades que explorar: o bien buscamos los puntos críticos de f sin restricciones que además pertenezcan a E; o bien los extremos se encuentran entre los puntos críticos de f bajo la restricción de igualdad. Estas dos posibilidades corresponden a los sistemas

$$2x=2y=-1=0,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1,$$

y

$$2x+\lambda\frac{x}{2}=0,\quad 2y+\lambda\frac{y}{2}=0,$$
$$-1+\lambda\frac{2z}{9}=0,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1,$$

respectivamente. Evidentemente, la primera posibilidad es incompatible de suerte que no aporta ningún candidato. Para la segunda, y tras factorizar x e y en la primera y segunda ecuación respectivamente, llegamos a las dos posibilidades:

(I) $x = y = 0$: en este caso de la restricción de igualdad obtenemos $z = \pm 3$;

(II) $\lambda = -4$: de la tercera ecuación encontramos $z = -\frac{9}{8}$, y de la restricción

$$x^2 + y^2 = \frac{55}{16}.$$

Todos estos puntos son críticos.

Examinamos a continuación los valores de la función f en todos estos candidatos para encontrar

$$f(0, 0, 3) = -3, \quad f(0, 0, -3) = 3,$$

y

$$f(x, y, -9/8) = \frac{73}{16} \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = \frac{55}{16}.$$

Por tanto el mínimo se encuentra en $(0, 0, 3)$ y el máximo se alcanza en todos los puntos de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \frac{55}{16}, \quad z = -\frac{9}{8}.$$

CAPÍTULO 3

Integración múltiple

Los ejercicios de este tema están dedicados al cálculo integral de funciones de varias variables, centrándonos en el estudio de integrales dobles y triples. La dificultad real de los ejercicios expuestos aquí estriba fundamentalmente en la correcta descripción de las regiones de integración, tanto en el plano, como en el espacio. Para ayudarnos en esta tarea hemos tratado de representar gráficamente la mayoría de los ejercicios resueltos de manera que el lector pueda visualizar las descripciones. No obstante, la labor de realizar bocetos de regiones en el plano y el espacio no es tarea sencilla y necesita de una buena dosis de experiencia, por lo que recomendamos efusivamente que el lector trate de dibujar por sí mismo las gráficas mostradas. En la última sección proponemos resolver las integrales mediante cambios de variables, prestando especial atención al uso de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Sección 3.1

Integrales dobles

Calcular las integrales siguientes:

512 $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (x+y)\,dx\,dy.$

513 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta.$

514 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 ye^x\,dy\,dx.$

515 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^3 y^5e^{xy^3}\,dx\,dy.$

516 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^e \frac{\operatorname{sen} y}{x}\,dx\,dy.$

517 $\displaystyle\int_{[0,1]^2} (ax+by+c)\,dA.$

Solución:

516 La integración interior respecto a x tratando a la variable y como si fuera una constante nos da

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} y}{x}\,dx = \operatorname{sen} y\,\log x\Big|_1^e = \operatorname{sen} y,$$

y, ahora la integración respecto a y proporciona el valor de la integral doble solicitada

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y\,dy = -\cos y\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

517 Como la región es $[0,1]\times[0,1]$, la integral que nos piden será

$$\int_0^1\int_0^1 (ax+by+c)\,dx\,dy.$$

Integrando en primer lugar respecto a x, obtenemos

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{2}+by+c\right)\,dy.$$

Y esta integración respecto a y arroja el valor

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c,$$

que es el valor de la integral solicitada.

518 *Probar que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 x^n y^n\,dx\,dy = 0.$$

Solución 518:

La integración iterada proporciona

$$\int_0^1\int_0^1 x^n y^n\,dx\,dy = \int_0^1 y^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1\,dy$$
$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 y^n\,dy = \frac{1}{n+1}\,\frac{y^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2};$$

Tomando límite se obtiene el resultado esperado.

Calcular las siguientes integrales dobles:

519 $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx.$

520 $\displaystyle\int_0^1\int_{x}^{\sqrt{x}} (y+y^3)\,dy\,dx.$

521 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy\,dx.$

522 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos x} y\operatorname{sen} x\,dy\,dx.$

523 $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} x(1+y)\,dy\,dx.$

524 $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{-3\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}} \left(\frac{5}{\sqrt{2+x}}+y^3\right)dy\,dx.$

525 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx.$

526 $\displaystyle\int_0^1\int_{x^4}^{x} (y-x)\,dy\,dx.$

Solución:

521 La integral interior es

$$\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy = e^{x+y}\Big|_{-2|x|}^{|x|} = e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}.$$

La segunda integral iterada es ahora

$$\int_{-1}^{1} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx.$$

Para calcular esta integral debemos desglosarla en dos integrales para poder tratar el valor absoluto. Si llamamos I a la integral solicitada entonces

$$I = \int_{-1}^{0} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx.$$

Ahora bien, en la primera integral $|x| = -x$ pues x es negativo, y en consecuencia

$$\int_{-1}^{0} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(1 - e^{3x}\right) dx$$
$$= 1 - \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3}.$$

Por otro lado, cuando x es positivo $|x| = x$, y así

$$\int_{0}^{1} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx = \int_{0}^{1} \left(e^{2x} - e^{-x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}.$$

El resultado final será la suma de los dos resultados parciales obtenidos:

$$I = \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^{3}} - \frac{5}{6}.$$

524 La integración interior respecto a y da el siguiente resultado

$$\int_{0}^{2} \left(y\frac{5}{\sqrt{2+x}} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{\frac{-3\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}} dx$$
$$= \frac{15\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}} = 15\sqrt{2-x}$$

La segunda integración iterada nos da finalmente,

$$\int_0^2 15\sqrt{2-x}\,dx = -10(2-x)^{3/2}\Big|_0^2 = 20\sqrt{2}.$$

Calcular las integrales:

527 $\displaystyle\int_D x^3y\,dA$, *con* D *la región entre el eje* Y *y la parábola* $x = -4y^2+3$.

528 $\displaystyle\int_D (1+xy)\,dA$, *con* D *la región definida por* $1 \le x^2+y^2 \le 2$ *e* $y \ge 0$.

529 $\displaystyle\int_D y\,dA$, *con* $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \frac{2x}{\pi} \le y,\ y \le \operatorname{sen} x\big\}$.

530 $\displaystyle\int_D 2y\,dA$, *con* D *la región* $y \ge x^2$ *interior al círculo* $x^2+y^2 = 2$.

531 $\displaystyle\int_D dA$, *con* D *la región entre* $y = |x|$ *e* $y = \frac{2}{1+x^2}$.

Solución:

527 Para obtener los límites de integración comenzamos dibujando la región D. Atendiendo a la Figura 15, observamos que x varía entre $x = 0$ y $x = 3$ mientras que y lo hace entre la parte inferior y la parte superior de la parábola $x = 3-4y^2$. Así,

$$\int_D x^3y\,dA = \int_0^3 \int_{-\sqrt{\frac{3-x}{4}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{4}}} x^3y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x^3y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{\frac{3-x}{4}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{4}}} dx = 0.$$

530 La región de integración es la intersección del círculo centrado en el origen y radio $\sqrt{2}$ ($x^2+y^2 \le 2$) y la parte sobre la

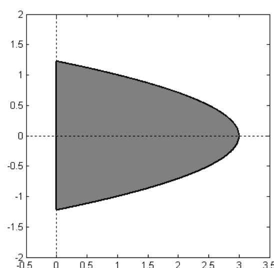


Figura 15. Región D del Ejercicio **527**

parábola $y = x^2$. Los puntos de corte de ambas curvas $y = x^2$ y $x^2 + y^2 = 2$ son $(-1, 1)$, $(1, 1)$ (véase la Figura 16(a)). En consecuencia la integral pedida es

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 2y \, dy \, dx.$$

Nótese que la curva que limita superiormente la región D es precisamente $y = \sqrt{2 - x^2}$. La integración interior es

$$\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 2y \, dy = y^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} = 2 - x^2 - x^4,$$

y la segunda integración iterada arroja el valor

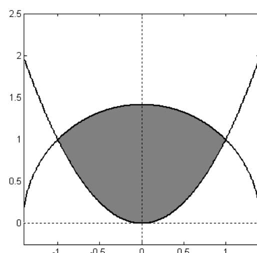
$$\int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^4) \, dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^{1} = \frac{44}{15}.$$

531 Para hacernos una idea de la región de integración es importante realizar un boceto de las dos curvas que limitan la región D. Véase la Figura 16(b). Las coordenadas de los dos puntos de corte se encuentran resolviendo el sistema

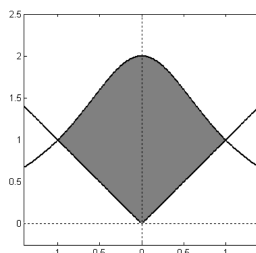
$$y = |x|, \quad y = \frac{2}{1 + x^2}.$$

Las soluciones se obtienen inmediatamente. De hecho debido a la simetría, basta considerar la raíz positiva de la ecuación

$$x = \frac{2}{1 + x^2}.$$



(a) **530**



(b) **531**

Figura 16. Regiones de integración de los Ejercicios **530** y **531**

Se obtiene sin dificultad $x = 1$. Los puntos de corte que nos determinan los límites de integración para la variable x son por tanto -1 y 1. Así la integral solicitada I será

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{\frac{2}{1+x^2}} dy\, dx.$$

La integral interior vale

$$\int_{|x|}^{\frac{2}{1+x^2}} dy = \frac{2}{1+x^2} - |x|\,,$$

y la integral segunda será

$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{1+x^2} - |x|\; dx = 2\arctan x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} |x|\; dx.$$

Desglosando la segunda integral en los intervalos $[-1, 0]$, $[0, 1]$ para tratar el valor absoluto, encontramos inmediatamente que

$$I = \pi - 1.$$

532 *Calcular el área de la región del plano acotada por las curvas $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, mediante integración doble.*

Calcular los volúmenes de los sólidos acotados en cada caso mediante integración doble:

533 *El grafo de* $z = \operatorname{sen} y, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

534 *La superficie* $z = x^2 + y$ *sobre* $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$.

535 *La superficie* $z = x^2 + y^2$ *y los planos* $z = 0$ *y* $z = 10$.

536 *El grafo de* $z = \frac{xy}{2}$ *sobre la región limitada por* $x = 2$, $y = x$, $y = 0$.

537 *Superficie* $z = xy$ *sobre la región acotada por* $y = 0$, $y = x^2$, $y = (x-2)^2$.

538 *Volumen del primer octante bajo el plano* $z = x + y$ *y sobre* $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

Solución:

535 La proyección de la región en cuestión sobre el plano XY corresponde al círculo $x^2 + y^2 \leq 10$ (véase la Figura 17(a)). La descripción de este círculo en coordenadas cartesianas es

$$-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}, \quad -\sqrt{10 - x^2} \leq y \leq \sqrt{10 - x^2}.$$

Por simetría el volumen V del sólido pedido corresponderá a la integral

$$V = 4 \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} \left[10 - (x^2 + y^2)\right] \, dx.$$

Tras la integración interna encontramos

$$V = \frac{8}{3} \int_0^{\sqrt{10}} (10 - x^2)^{3/2} \, dx.$$

El cambio de variable $x = \sqrt{10} \operatorname{sen} t$ conduce a

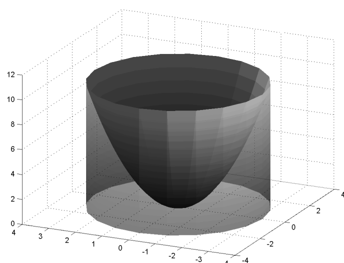
$$V = \frac{800}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt,$$

y mediante las fórmulas del ángulo doble, podemos escribir

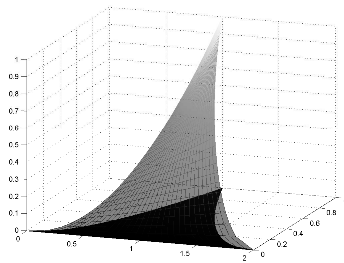
$$\cos^4 t = \cos^2 t(1 - \operatorname{sen}^2 t) = \cos^2 t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2t)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}.$$

Así

$$V = \frac{800}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}\right) dt$$
$$= \frac{800}{3}\left(\frac{3}{8}t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4t)}{32}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 50\pi.$$



(a) Ejercicio **535**



(b) Ejercicio **537**

Figura 17. Volúmenes de sólidos mediante integración doble

537 La región acotada por $y = 0$ y las dos parábolas $y = x^2$ e $y = (x-2)^2$ queda determinada por

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \qquad 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le (x-2)^2,$$

o bien por

$$0 \le y \le 1, \quad \sqrt{y} \le x \le 2 - \sqrt{y}.$$

Véase la Figura 17(b). Obsérvese que la segunda raíz debe tener signo negativo. En consecuencia el volumen pedido V

se puede encontrar usando cualquiera de estas dos descripciones. Por ejemplo

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\, dx\, dy.$$

La integración interna proporciona

$$V = \int_0^1 2y(1-\sqrt{y})\, dy,$$

y por tanto, después de realizar esta segunda integración que es también inmediata, encontramos

$$V = \frac{1}{5}.$$

¿Podría el lector encontrar el volumen usando la primera descripción de la región de integración?

538 En este caso la región de integración sobre el plano XY se describe como

$$0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

de suerte que el volumen V solicitado será

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} (x+y)\, dy\, dx.$$

La integración interna inmediata conduce a

$$V = \int_0^2 \left(x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx$$

Esta integración lleva a

$$V = \left. \left(-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{3/2} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right) \right|_0^2 = 2.$$

La Figura 18 muestra un boceto de la situación.

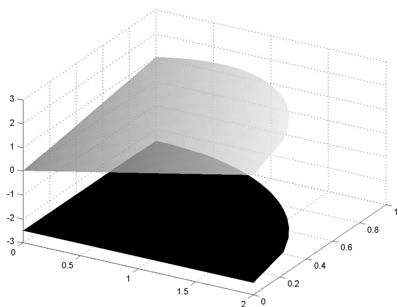


Figura 18. Gráfica del Ejercicio **538**

539 *Evaluar la integral*

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-x^2}^{2-2x^2} (x^2 + xy - 1)\, dy\, dx$$

y describir la región D en la que se está integrando.

540 *Evaluar la integral doble de $f(x, y) = xy$ sobre el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 3x$.*

Solución 540:

Para hacernos una idea de cómo describir la región de integración debemos intentar hacer un boceto de la situación de las dos parábolas. Encontramos en primer lugar los puntos de corte de ambas que serán las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 3x.$$

Dichas soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$. Estos serán por tanto los límites de integración para x. En realidad, la región se describe como (véase la Figura 19)

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3, \quad x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 3x,$$

y el volumen será

$$\int_{1/2}^{3}\int_{x^2-4x+3}^{-x^2+3x} xy\,dy\,dx = \int_{1/2}^{3} \frac{x}{2}\left((-x^2+3x)^2 - (x^2-4x+3)^2\right)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{8}x^4 + 4x^3 - \frac{9}{4}x^2\right)\Big|_{1/2}^{3} = \frac{625}{128}.$$

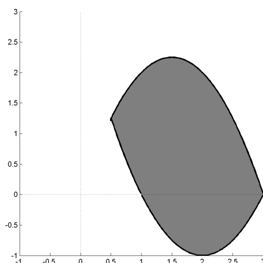


Figura 19. Región entre las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 3x$

541 *Calcular la siguiente integral* $\int_D xy^2\,dA$, *donde*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x^2 \leq y^2 \leq x^2 + 1,\ y \geq 0\}.$$

542 *Calcula la integral doble*

$$\int_R 4xy\,dA,$$

donde R es el recinto limitado por las curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x - 1$.

Solución 542:

Para determinar los límites de integración para la variable x, buscamos los puntos de intersección de la parábola $y = 1 - x^2$ y la recta $y = x - 1$ resolviendo para ellos la ecuación

$$1 - x^2 = x - 1.$$

Así encontramos que la región R de integración es

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x-1 \leq y \leq 1-x^2,$$

y la integral doble pedida I será

$$I = \int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} 4xy\, dy\, dx = \int_{-2}^{1} 2x \left((1-x^2)^2 - (x-1)^2\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2x^5 - 6x^3 + 4x^2)\, dx = \frac{27}{2}.$$

543 *Cambia el orden de integración en*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{y} f(x,y)\, dx\, dy.$$

En las integrales siguientes cambiar el orden de integración:

544 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr\, d\theta.$

546 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{1} \frac{x^2-y}{x^2+1}\, dy\, dx.$

545 $\displaystyle\int_0^{1} \int_{x^3}^{x^2} \frac{x+y}{\operatorname{sen} x}\, dy\, dx.$

547 $\displaystyle\int_0^{1} \int_{1-y}^{1} (x+y^2)\, dx\, dy.$

Solución 546:

La región de integración de esta integral es

$$-1 \leq x \leq 1, \quad |x| \leq y \leq 1.$$

Es importante tener presente el boceto que representa esta región en el plano (Figura 20). En dicho boceto observamos que la variable y se mueve desde 0 a 1, $0 \leq y \leq 1$, y para cada una de estas y, la variable x se debe mover desde $-y$ hasta y. Así el cambio de orden de integración nos lleva a escribir la misma integral como

$$\int_0^{1} \int_{-y}^{y} \frac{x^2-y}{x^2+1}\, dx\, dy.$$

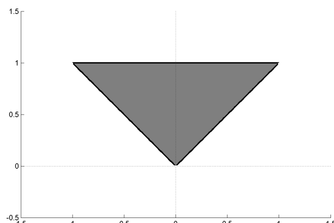


Figura 20. Región de integración en el Ejercicio **546**

Calcular las siguientes integrales mediante un cambio de orden y esbozar la región de integración:

548 $\displaystyle\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} x\,dy\,dx.$

549 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{y^2-4}^{4-y^2} y\,dx\,dy.$

550 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\operatorname{sen} y} dx\,dy.$

551 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{y+2}^{1+\sqrt{1-y^2}} 2y\,dx\,dy.$

552 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y\sqrt{x^4+1}\,dx\,dy.$

553 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy.$

Solución:

550 La región de integración viene descrita por

$$0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le x \le \operatorname{sen} y,$$

y está representada en la Figura 21.

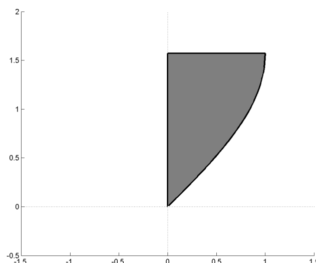


Figura 21. Gráfica del Ejercicio **550**

El cambio de integración nos lleva a

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \operatorname{arc\,sen} x.$$

No obstante, la integración resulta más sencilla si la evaluamos sin realizar el cambio de integración, es decir,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} y} dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y\, dy = 1.$$

551 La región se describe por

$$-1 \leq y \leq 0, \quad y + 2 \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}.$$

La ecuación $x = y + 2$ es una recta mientras que $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ es una parte de la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$. De este modo resulta sencillo esbozar la región de integración (véase la Figura 22). El cambio de orden de integración nos lleva a

$$1 \leq x \leq 2, \quad x - 2 \leq y \leq \sqrt{(x-1)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Así la integral será

$$\int_1^2 \int_{x-2}^{\sqrt{x^2-2x}} 2y\, dy\, dx,$$

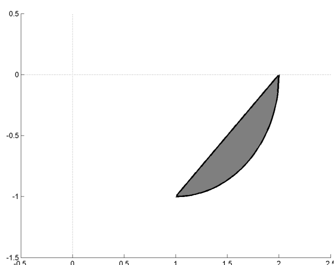


Figura 22. Región de integración en el Ejercicio **551**

y su cálculo se realiza sin mayores dificultades

$$\int_1^2 \left[(x^2-2x)-(x-2)^2\right]\,dx = (x^2-4x)\Big|_1^2 = -1.$$

553 La región que se describe por

$$0 \le y \le 1, \quad y^{1/3} \le x \le 1,$$

(ver Figura 23) también se puede determinar, cambiando el orden de las variables, por

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^3,$$

y la integral será

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\,dx &= \int_0^1 x_3\sqrt{1+x^4}\,dx \\ &= \frac{1}{6}(1+x^4)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right).\end{aligned}$$

554 *Calcular la integral doble*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx.$$

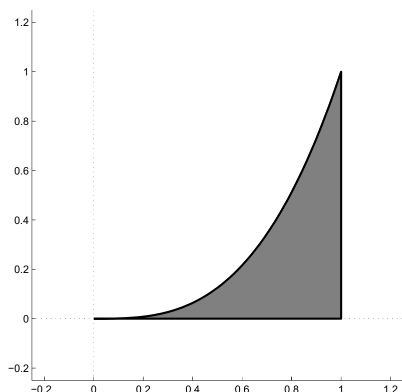


Figura 23. Ejercicio **553**: región dada por $0 \leq y \leq 1$, $y^{1/3} \leq x \leq 1$

555 *Calcular la integral doble*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{1}^{\frac{1}{x}} y^3 x e^{x^2 y^2} \, dy \, dx.$$

Solución 555:

Observamos que resulta más sencillo integrar respecto a x que respecto a y, lo cual aconseja cambiar el orden de integración. De este modo tendremos que la región

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq \frac{1}{x},$$

se describe también como

$$1 \leq y \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{y},$$

y la integral resulta

$$I = \int_{1}^{2} \int_{1/2}^{1/y} y^3 x e^{x^2 y^2} \, dx \, dy = \int_{1}^{2} \frac{y}{2} \, e^{x^2 y^2} \Big|_{1/2}^{1/y} \, dy$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{y}{2} \left(e - e^{y^2/4} \right) \, dy = \left(\frac{e}{4} y^2 - e^{y^2/4} \right) \Big|_{1}^{2} = e^{1/4} - \frac{e}{4}.$$

Sección 3.2

Integrales triples

Calcular las siguientes integrales triples:

556 $\displaystyle\int_W x^2\,dV$, $W = [0,1]^3$.

557 $\displaystyle\int_W xyz\,dV$, $W = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$.

558 $\displaystyle\int_W (x+y+z)\,dV$, $W = [0,2]\times[0,3]\times[0,1]$.

559 $\displaystyle\int_W \operatorname{sen}(x+y+z)\,dV$, $W = [0,\pi]^3$.

Solución 559:

La integral triple que nos solicitan es

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx.$$

En cada integración iterada, consideramos las variables respecto de las que no estamos integrando como si fueran constantes de manera análoga a como hacíamos con las integrales dobles, para obtener en pasos sucesivos,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_0^\pi \left(-\cos(x+y+z)\right)\Big|_0^\pi \,dy\,dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\cos(x+y) - \cos(\pi+x+y)\right)\,dy\,dx \\ &= \int_0^\pi \left(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(\pi+x+y)\right)\Big|_0^\pi \,dx \\ &= \int_0^\pi \left(\operatorname{sen}(\pi+x) - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2\pi+x) + \operatorname{sen}(\pi+x)\right)\,dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, debido a la periodicidad del seno, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(2\pi+x)$ son iguales, tendremos finalmente

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^\pi \left(\operatorname{sen}(\pi+x) - \operatorname{sen} x\right)\,dx \\ = 2\left(\cos x - \cos(\pi+x)\right)\Big|_0^\pi = -8. \end{aligned}$$

Evaluar las siguientes integrales triples y esbozar la región de integración:

560 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y y\,dz\,dy\,dx.$

561 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^y \int_0^{x+y} (x+y+z)\,dz\,dx\,dy.$

562 $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} \int_0^{xy} 4z\,dz\,dy\,dx.$

563 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$

564 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_y^{2y} \sqrt{x+y+z}\,dz\,dy\,dx.$

565 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_{x^2}^1 z\,dz\,dy\,dx.$

Solución:

561 En este tipo de integrales triples suele ser más delicado el esbozar o imaginarse la región de integración en el espacio que la propia integración en sí. La tarea de esbozar la región de integración es prácticamente obligatoria cuando se presenta un cambio en el orden de integración. Por esta razón es tan importante ejercitarse en esta tarea de representar las regiones de integración de las integrales triples. En el caso que nos ocupa

$$I = \int_0^2 \int_0^y \int_0^{x+y} (x+y+z)\ dz\,dx\,dy,$$

y la región de integración queda determinada por las desigualdades

$$0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le z \le x+y.$$

Para obtener la gráfica partimos de la descripción que nos reflejan los límites que acotan las variables. La última de ellas, en este caso $0 \le z \le x+y$, nos dice que la región está limitada por las superficies $z=0$ y $z=x+y$ a lo largo

del eje Z. Mientras que la proyección de dicha región a lo largo de este eje está determinada por las otras dos variables. En la Figura 24 se puede ver esquemáticamente dicha región de integración.

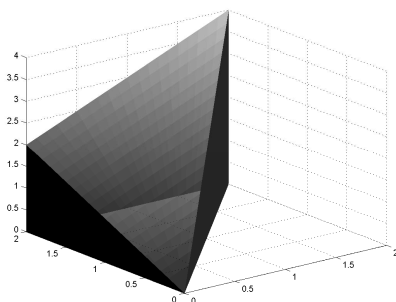


Figura 24. Región de integración en el Ejercicio **561**

Como hemos observado el cálculo de la integral es prácticamente automático cuando las primitivas involucradas en las distintas integrales iteradas son inmediatas. Así

$$I = \int_0^2 \int_0^y \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{x+y} dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^y \frac{3}{2}(x+y)^2\, dx\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(x+y)^3 \Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^2 4y^3\, dy = y^4 \big|_0^2 = 16.$$

565 Como en el ejemplo precedente, la región de integración viene determinada por las desigualdades

$$-1 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1, \quad x^2 \leq z \leq 1.$$

Dicha región está esbozada en la Figura 25.

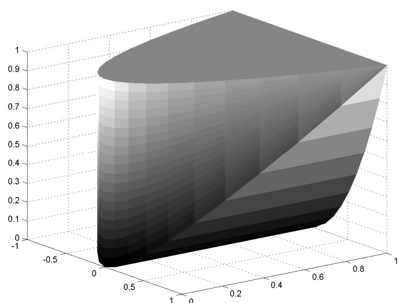


Figura 25. Representación gráfica del Ejercicio **565**

El cálculo de la integral de nuevo es inmediato

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{x^2}^{1} z\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} \frac{1-x^4}{2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^4)(1-x^2)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right)\bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{64}{105}.$$

Hallar la integral triple de la función $f(x, y, z)$ en el recinto W dado, en los siguientes casos:

566 $f(x, y, z) = x+y+z$, *W tetraedro de vértices* $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$.

567 $f(x, y, z) = xyz$, *W es el recinto bajo la superficie $z = 1-x^2$ sobre el rectángulo $[-1, 1] \times [0, 2]$ del plano XY.*

568 $f(x, y, z) = x^2$, *W es el tetraedro contenido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.*

569 $f(x, y, z) = x + y$, *W es la región entre las superficies $z = 2 - x^2$ y $z = x^2$, para $0 \leq y \leq 3$.*

Solución:

568 En este tipo de ejemplos nos identifican de manera descriptiva la región de integración y como paso importante debemos previamente concretarla en forma de desigualdades que involucren apropiadamente las variables. Esto supone además realizar una elección juiciosa sobre el orden de integración más conveniente. En este caso concreto, como la función a integrar no presenta ninguna dificultad, ningún orden de integración supone una ventaja esencial sobre ningún otro, de modo que elegimos por ejemplo $dz\, dy\, dx$ y en consecuencia debemos describir la región de integración del modo siguiente (véase la Figura 26)

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq z \leq 1-y-x.$$

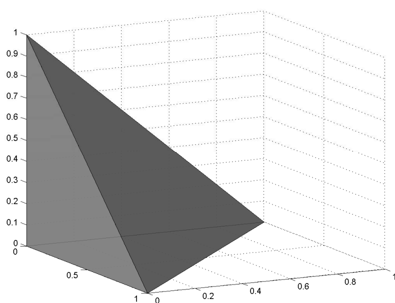


Figura 26. Volumen de integración del Ejercicio **568**

Nótese que la proyección de la región W a lo largo del eje Z (primera variable de integración elegida) corresponde al triángulo en el plano XY determinado por las rectas $y = 0$, $y = 1 - x$ ($x + y + z = 1$ cuando $z = 0$). Finalmente la proyección de este triángulo a lo largo del eje Y (segunda variable de integración) sobre el eje X es el intervalo $0 \leq x \leq 1$ que son los límites para la última variable de integración. El

cálculo de la integral no plantea ninguna dificultad especial. Su valor final es $\frac{1}{60}$.

569 Como en el ejemplo precedente, la dificultad real de este ejercicio consiste en describir convenientemente la región de integración. La información que nos proporcionan nos lleva a determinar los límites para las variables x y z como la intersección entre las superficies $z = 2 - x^2$ y $z = x^2$, sabiendo que $0 \leq y \leq 3$. Dicha intersección se determina resolviendo el sistema

$$z = 2 - x^2, \quad z = x^2,$$

que conduce trivialmente a la ecuación cuadrática

$$x^2 = 2 - x^2,$$

con soluciones -1 y 1. En consecuencia $-1 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq z \leq 2 - x^2$ y $0 \leq y \leq 3$. Dicha región puede verse en la Figura 27. El cálculo de la integral es ahora sencillo. Su valor final es 12.

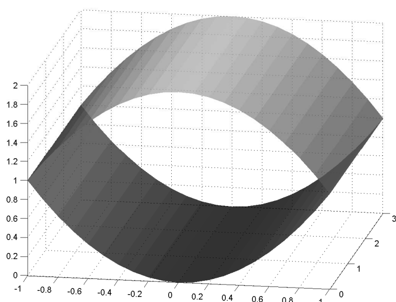


Figura 27. Gráfica del Ejercicio **569**

570 *Sea D la región limitada en $\mathbb{R}^3$ por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$. Evaluar la integral* $\displaystyle\int_D x\, dV$.

Solución 570:

Lo importante de este ejercicio consiste en describir correctamente la región de integración. Se ha intentado esbozarla en la Figura 28. Una vez representada, es claro que la proyección sobre el plano XY corresponde al cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$, mientras que la variable z se mueve entre la parte negativa y la parte positiva de la superficie esférica. Así,

$$\int_D x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx.$$

Puesto que la función integrando es x (que es función impar de x) y la región de integración es simétrica respecto plano YZ (o respecto al eje X), podemos anticipar que la integral solicitada debe anularse pues la parte positiva de la integral cancelará con la parte negativa de la misma.

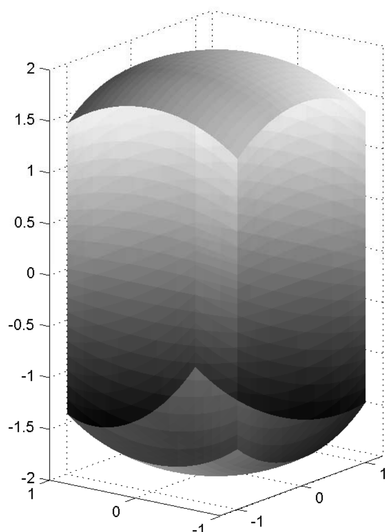


Figura 28. Gráfica del Ejercicio **570**

571 *Evaluar la integral* $\int_W (1 - z^2)\, dV$ *donde* W *es la pirámide de vértice superior* $(0, 0, 1)$ *y vértices en la base* $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *y* $(1, 1, 0)$.

Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales para obtener las otras cinco formas de la respuesta:

572 $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f\, dz\, dy\, dx.$

573 $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{2-x-y} f\, dz\, dy\, dx.$

574 $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{y+z-1}^0 f\, dx\, dy\, dz.$

575 $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} f\, dy\, dx\, dz.$

Solución 575:

En resumidas cuentas, la tarea propuesta consiste en describir la región

$$0 \le z \le 1, \quad 0 \le x \le z, \quad 0 \le y \le \sqrt{z^2 - x^2},$$

de las otras cinco maneras posibles. Para ello es prácticamente imprescindible tener muy presente el boceto de la región en el espacio (véase la Figura 29). A través de este boceto y realizando las proyecciones oportunas según qué orden de integración estemos siguiendo, se obtienen las otras cinco descripciones de dicha región, en concreto

$$\begin{gathered}
0 \le x \le 1, \quad x \le z \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{z^2 - x^2}, \\
0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{1 - y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1, \\
0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1, \\
0 \le z \le 1, \quad 0 \le y \le z, \quad 0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2}, \\
0 \le y \le 1, \quad y \le z \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2}.
\end{gathered}$$

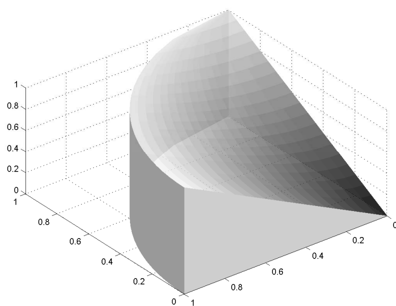


Figura 29. Región de integración del Ejercicio **575**

576 *Evaluar* $\displaystyle\int_W x^2 \cos z\, dV$ *siendo* W *la región limitada por los planos* $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$, $x = 0$ *y* $x + y = 1$.

Hallar los volúmenes que se indican mediante integración triple.

577 *Sólido limitado superiormente por* $z = x + y$ *e inferiormente por el triángulo de vértices* $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

578 *Sólido limitado por los planos* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$ *y* $x = z - y - 1$.

579 *Volumen comprendido entre* $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$ *y* $x + y + 2z = 2$.

580 *El sólido determinado por* $x^2 + y^2 \leq a^2$ *y* $x^2 + z^2 \leq a^2$.

581 *Región entre* $z = \cos^2(x + y)$ *y* $z = -\operatorname{sen}(x + y)$ *sobre* $[0, \frac{\pi}{2}]^2$.

582 *Volumen limitado por* $z = x^2$, $y + z = 4$, $y = 0$.

583 *Sólido acotado por* $z = 10 - x^2 - y^2$, $y = x^2$, $z = 0$.

584 *Región limitada por* $y = 4 - x^2 - z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *y* $x + z = 2$.

Solución:

579 El primer paso consiste en hacerse una idea exacta de la región cuyo volumen tenemos que calcular. Observemos que la

ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$ representa en el espacio un cilindro de base elíptica centrado en el origen mientras que la ecuación $x + y + 2z = 2$ determina un plano. Nótese además que dicho plano corta al cilindro en una elipse que está toda ella contenida en el semiespacio superior donde $z \geq 0$. El volumen que debemos calcular vendrá dado por la integral doble:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} \left(1 - \frac{x+y}{2}\right) dx\, dy,$$

donde la función integrando procede de la ecuación del plano $x + y + 2z = 2$ que es quien limita superiormente la región cuyo volumen queremos determinar. La primera integración nos lleva a

$$V = \int_{-1}^{1} \left((1 - \frac{y}{2})x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} dy,$$

de modo que nos interesa la integral

$$V = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} (2 - y)\sqrt{1 - y^2}\, dy,$$

que a su vez podemos desglosar en

$$V = 2\sqrt{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy - \sqrt{2} \int_{-1}^{1} y\sqrt{1 - y^2}\, dy.$$

Obsérvese cómo la segunda integral se anula al tratarse de un integrando impar sobre un intervalo simétrico respecto al origen, mientras que la primera corresponde al área de un semicírculo de radio uno centrado en el origen. En consecuencia el volumen solicitado será

$$V = \sqrt{2}\pi.$$

584 La Figura 30 representa el sólido cuyo volumen nos piden. Puesto que en la ecuación de la superficie $y = 4 - x^2 - z^2$ la

variable y nos la dan “despejada” podemos pensar en encontrar el volumen integrando dicha función y sobre la proyección del sólido sobre el plano XZ. El boceto nos deja bien claro que tal proyección es el triángulo

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2 - x,$$

y en consecuencia el volumen V será

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} \left(4 - x^2 - z^2\right) \, dz \, dx.$$

Dicha integral no plantea ninguna dificultad de cálculo pues todas las integraciones que aparecen son inmediatas. Así se obtiene $V = \frac{16}{3}$.

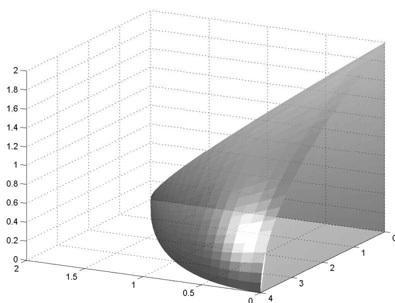


Figura 30. Gráfica del Ejercicio **584**

Escribir (no evaluar) la integral correspondiente al volumen de las siguientes regiones:

585 *Sólido limitado superiormente por el paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *e inferiormente por el disco unidad* $x^2 + y^2 \leq 1$.

586 *Sólido determinado por las condiciones* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ *y* $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$.

587 *Región entre el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el paraboloide* $z = x^2 + y^2$.

588 *Región determinada por* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *y* $2x^2 + z^2 \leq 1$.

Solución:

586 La desigualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

describe la esfera sólida (el interior de la esfera) centrada en el origen y de radio 1, mientras que

$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$$

corresponde a la parte "interior" de la hoja superior del cono ($z = \sqrt{x^2 + y^2}$), y también a la parte interior de la hoja inferior del cono $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. La intersección de ambas regiones es el sólido cuyo volumen debemos indicar. Ver la Figura 31. Por simetría basta indicar el volumen superior

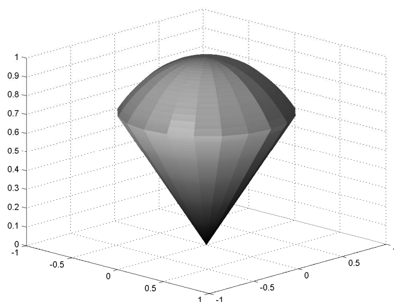


Figura 31. Ejercicio **586**: región entre un cono y una esfera

y multiplicar por 2, e incluso, si nos centramos en el primer octante, podemos multiplicar el volumen resultante por 8 para obtener el volumen total. Nótese que la región resultante tiene forma de un "helado". Dicho volumen lo podemos entender como el limitado entre los grafos de las funciones

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

integrado sobre su proyección en el plano XY. Para determinar esta proyección debemos concretar el círculo intersección de las dos superficies, es decir, resolver el sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Tras eliminar $x^2 + y^2$, llegamos inmediatamente a

$$2z^2 = 1,$$

por lo que $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y por tanto

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Esto significa que el círculo intersección en el plano XY está centrado en el origen y tiene radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finalmente,

$$V = 8\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^{\sqrt{1/2-x^2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy\, dx.$$

588 Las dos desigualdades que nos proponen representan:

(I) $x^2+y^2+z^2 \leq 4$: esfera sólida centrada en el origen y radio 2;

(II) $2x^2+z^2 \leq 1$: interior de un cilindro de base elíptica a lo largo del eje Y.

Véase la Figura 32. El modo más cómodo de describir la región intersección de las dos indicadas más arriba consiste en entenderla entre el grafo de las funciones

$$-\sqrt{4-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2-z^2},$$

integrando sobre la proyección sobre el plano XZ. Dicha proyección es precisamente la elipse que define el cilindro $2x^2 + z^2 \leq 1$. Por simetría podemos escribir que el volumen solicitado es

$$V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}} \sqrt{4-x^2-z^2}\, dx\, dz.$$

589 *Calcular el volumen del sólido limitado por* $x^2+y^2 \leq 4-z$, $x^2 \leq 3y$, $z \geq 0$.

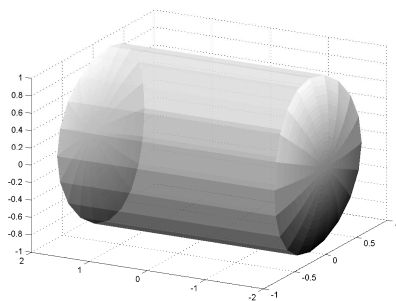


Figura 32. Gráfica del Ejercicio **588**

Sección 3.3

Cambios de variable

Calcular el área encerrada por las siguientes curvas en polares mediante integración doble:

590 *Área del círculo $r = \alpha$.*

591 *Área acotada por la cardioide $r = 1 + \cos(2\theta)$.*

592 *Área entre los círculos $r = 1$ y $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.*

593 *Área interior a la curva $r = 2 + \cos\theta$ y exterior al círculo $r = 2$.*

Solución 592:

Para identificar de manera más clara la curva $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, multiplicamos la misma por r e identificamos los términos en coordenadas rectangulares

$$x^2 + y^2 = 2y,$$

o reagrupando términos

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Vemos que efectivamente se trata del círculo centrado en $(0,1)$ y radio 1. Para determinar el área en coordenadas polares necesitamos conocer el ángulo en que se produce el corte de los dos círculos

$$1 = r = 2\operatorname{sen}\theta.$$

Vemos sin ninguna dificultad que se trata de $\theta = \frac{\pi}{6}$. Por tanto, y debido a la simetría de la figura, tendremos

$$A = 2\left(\int_0^{\pi/6} 2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\,d\theta\right).$$

Recuérdese que el área encerrada por una figura dada en polares $r = f(\theta)$ entre los ángulos θ_1 y θ_2 viene dada por la integral

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(\theta)^2}{2}\,d\theta.$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo doble

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

para realizar la integración anterior, llegamos a que el área pedida es $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Evaluar las siguientes integrales usando el cambio a polares donde la región D está determinada en cada caso por las ecuaciones y condiciones dadas:

594 $\displaystyle\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, *$D$ comprendido por $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$.*

595 $\displaystyle\int_D xy\,dA$, *$D$ limitado por $x^2+y^2 = 2$, $y \le x$ e $y > 0$.*

596 $\displaystyle\int_D (x+y)\,dA$, *$D$ acotado por $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $y = x$, $y = -x$ con $y \ge 0$.*

597 $\displaystyle\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, *$D$ limitado por $x = 2$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.*

598 $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA,\ D=\{x^2+y^2\le 2x\}.$

Solución:

594 Probablemente el paso más importante en el cambio de una integral a polares sea la descripción del recinto de integración en tal sistema de coordenadas. Según la Figura 33 que concreta cuál es la región de integración en este ejemplo, vemos inmediatamente que el ángulo θ varía entre los límites $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$. Para cada ángulo θ en ese rango, el radio debe llegar hasta cortar la recta $x=1$, es decir,

$$r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}.$$

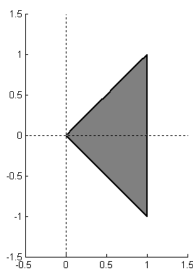


Figura 33. Región de integración del Ejercicio **594**

En consecuencia, la descripción del recinto de integración en coordenadas polares será

$$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le\frac{1}{\cos\theta}.$$

La integral solicitada será, teniendo en cuenta el jacobiano r,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{\sec\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left.\frac{r^2\cos\theta}{2}\right|_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta.$$

Un cambio de variable trigonométrico del tipo $t = \operatorname{sen}\theta$ da lugar a la integral

$$\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

596 En este caso la región de integración es la corona descrita por

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4},\quad 1\leq r\leq 2.$$

(véase la Figura 34). Por la tanto la integral que nos ocupa se escribe en coordenadas polares como

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1}^{2} r^2\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right)\,dr\,d\theta.$$

Las dos integraciones que se deben realizar son directas y no ofrecen mayores dificultades. El resultado final es $\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

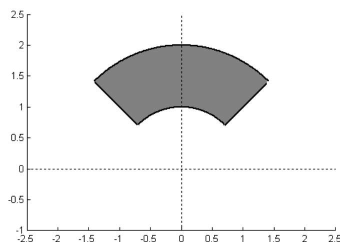


Figura 34. Representación gráfica del Ejercicio **596**

598 La región de integración en este caso, escrita en coordenadas polares, es

$$r \leq 2\cos\theta$$

que representa el interior del círculo centrado en $(1,0)$ y radio 1. Esta conclusión se puede obtener de manera clara si se completan cuadrados en la forma del recinto en coordenadas rectangulares

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

En este caso los límites de integración para θ deben ser $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, pues es el intervalo de ángulos en que está definido dicho círculo. Así vemos que la integral que nos interesa es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} dr\,d\theta.$$

Los cálculos concretos no suponen ninguna dificultad especial. El valor de la integral es 4.

599 *Sea* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2}, x \geq \sqrt{3}y \geq 0\}$ *y sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función integrable. Escribir la integral doble* $\int\int_D f\,dA$ *en términos de integrales iteradas de la siguiente forma:*

(a) $\int\int f(x,y)\,dx\,dy.$

(b) $\int\int f(x,y)\,dy\,dx.$

(c) $\int\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta.$

600 *Considérese la integral*

$$I = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx.$$

(a) Determinar los límites de integración para poder escribir I *de la forma*

$$I = \int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx\,dz.$$

(b) *Calcular el valor de dicha integral mediante un cambio de variables adecuado.*

Solución 600:

La primera parte de este ejercicio consiste en invertir el orden de integración de $dz\,dy\,dx$ a $dy\,dx\,dz$. Esto exige realizar un boceto preciso de la región de integración descrita por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

(véase la Figura 35).

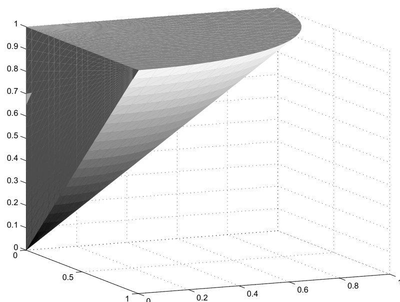


Figura 35. Gráfica de la región del Ejercicio **600**

Se trata del primer cuarto del interior del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitado superiormente por el plano $z = 1$. El cambio de orden de integración pedido nos lleva a observar que $0 \leq z \leq 1$. Para cada tal z, la proyección del recinto sobre el plano XZ queda determinada por

$$0 \leq x \leq z.$$

Finalmente la variable y, para cada par (x, z) de los descritos, tendrá unos límites

$$0 \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}.$$

La integral será

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx\, dz.$$

La segunda parte del problema consiste en calcular la integral anterior mediante un cambio juicioso de variables. Tenemos esencialmente dos posibilidades: las coordenadas cilíndricas o las esféricas. En coordenadas cilíndricas la región de integración se describe de manera muy simple como

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 1, \quad r \le z \le 1.$$

La integral en coordenadas cilíndricas será

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 \frac{e^{z^2}}{r} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Al realizar la primera integración debemos enfrentarnos a la primitiva de e^{z^2}. Dicha primitiva no existe en términos elementales, de modo que debemos explorar un cambio de orden de integración en la integral triple. Es muy sencillo escribir dicha integral en el orden $dr\, dz\, d\theta$,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^z e^{z^2} \, dr \, dz \, d\theta.$$

La primera integración iterada nos lleva a

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 z e^{z^2} \, dz \, d\theta.$$

Ésta resulta ahora inmediata. Nótese la diferencia esencial entre ambos órdenes de integración. El valor final de la integral es $\frac{\pi}{4}(e - 1)$.

Realizar el cambio a polares en las siguientes integrales dobles:

601 $\displaystyle \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$

602 $\displaystyle \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy.$

603 $\displaystyle \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x,y) \, dy \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$

604 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y^{2/3}-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

Solución:

603 La región descrita por estas dos integrales dobles aparece en la Figura 36. Resulta interesante observar cómo esta misma

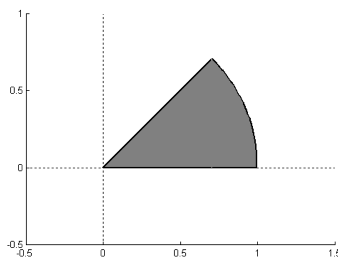


Figura 36. Gráfica del Ejercicio **603**

región es de muy sencilla descripción en coordenadas polares al tener simetría circular. En efecto, la integral resultante es

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^1 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

604 La región de integración viene representada en la Figura 37. De este modo el ángulo tiene por límites 0 y $\frac{\pi}{2}$ mientras que el radio debe moverse desde 0 hasta la ecuación de la curva

$$x^2 = y^{2/3} - y^2$$

una vez pasada a polares y despejado el radio. De manera sencilla después de unos cuantos cálculos se obtiene

$$r = \sqrt{\operatorname{sen}\theta},$$

de modo que la integral queda

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

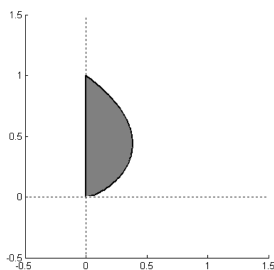


Figura 37. Región de integración del Ejercicio **604**

605 *Encontrar el volumen de la región determinada por* $x^2+y^2+z^2 \leq 10$, $z \geq 2$ *mediante integración doble.*

606 *Calcula la integral doble*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{0}^{x} \frac{y(x^2+y^2)}{x^3} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx.$$

Solución 606:

Cualquiera de los dos posibles órdenes de integración en coordenadas rectangulares parece bastante complicado. Intentémoslo en coordenadas polares. La región de integración (véase la Figura 38) nos lleva a los límites

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{2}\sec\theta \leq r \leq \sec\theta,$$

donde las secantes aparecen al pasar las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ a polares. Así se trata de calcular la integral

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{2}\sec\theta}^{\sec\theta} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} e^{r^2} r\, dr\, d\theta.$$

La integración con respecto a r es directa y nos lleva a

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} \left(e^{\frac{1}{\cos^2\theta}} - e^{\frac{1}{4\cos^2\theta}}\right) d\theta.$$

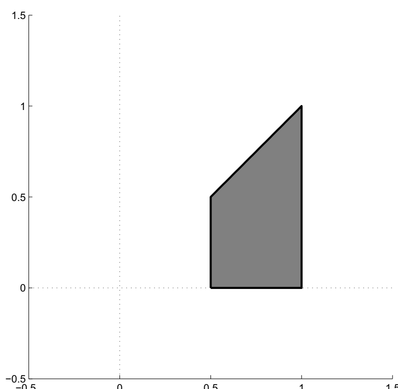


Figura 38. Representación gráfica del Ejercicio **606**

Es interesante observar ahora que la derivada del exponente $\frac{1}{\cos^2\theta}$ es precisamente la fracción que acompaña a tales exponenciales. De este modo el cambio de integración $t = \frac{1}{\cos^2\theta}$ lleva directamente al resultado

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{\cos^2\theta}} - 4e^{\frac{1}{4\cos^2\theta}}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}.$$

Después de realizar estos cálculos con un poco de cuidado obtenemos el resultado final

$$\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e - e^{1/2} + e^{1/4}.$$

Evaluar las siguientes integrales en los recintos indicados:

607 $\int_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dA$, *donde* $D = \{x^2+y^2 \le 4\}$.

608 $\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\, dA$, *con* D *la región del primer cuadrante entre* $x^2+y^2=1$ *y* $x^2+y^2=2$.

609 $\int_D y\, dA$, *con* D *el triángulo de lados* $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt{3}x$.

610 $\int$ *dA, con D la región del primer cuadrante acotada por los círculos* $x^2+y^2=1$ *y* $x^2+y^2=x$.

Solución 610:

Después de darse cuenta de que la ecuación $x^2+y^2=x$ representa el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en el $(\frac{1}{2},0)$ (completando cuadrados), y de que en realidad la integral que nos solicitan es el área de la región entre los dos círculos de la Figura 39, podemos encontrar el valor de dicha integral mediante un sencillo argumento geométrico. En verdad, el valor de la integral solicitada es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

Vale la pena de todos modos que nuestros lectores planteen dicha

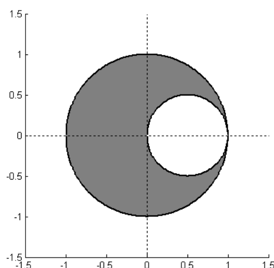


Figura 39. Gráfica del Ejercicio **610**

integral en coordenadas polares y comprueben que resulta el valor anterior.

611 *Calcular la siguiente integral*

$$\int_{-1}^{0}\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Solución 611:

Denotemos por I la integral pedida. Para cada y fijo en el intervalo $[-1, 0]$, en la integral interior

$$\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{(x/2)^2}\,dx$$

podemos realizar el cambio de integración

$$t = \frac{x}{2}, \quad dt = \frac{dx}{2}.$$

De este modo, dicha integral interior se convierte en

$$2\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{t^2}\,dt,$$

y la integral doble inicial en

$$I = 2\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{t^2+y^2}\,dt\,dy.$$

Ahora si realizamos el cambio a polares, se obtiene de modo inmediato

$$I = 2\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_{0}^{1} re^{r^2}\,dr\,d\theta.$$

El valor final de I es $\frac{\pi}{2}(e-1)$.

Alternativamente se puede plantear el siguiente cambio de variables, semejante a las coordenadas polares,

$$x = 2r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

dictado por la simetría de la región de integración y la forma de la función integrando. El jacobiano del cambio es en este caso $2r$.

612 *Sea R el rectángulo acotado por las rectas $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-3y=2$ y $2x-3y=5$. Haciendo el cambio de variable $u=x+y$, $v=2x-3y$, encontrar el área de R.*

613 *Haciendo la sustitución $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$, encontrar el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ e $y=2x$.*

614 *Calcular el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^3 = 3$, $xy^3 = 6$. (Indicación: realizar el cambio de variable $u = xy$, $v = xy^3$).*

615 *Encontrar el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ y $x = 4y^2$. (Indicación: usar u y v tales que $y = ux^2$, $x = vy^2$).*

616 *Sea R la región del primer cuadrante acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 8y$. Encontrar el valor de la integral*

$$\int_R \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\, dA.$$

*(Indicación: usar un cambio de variables similar al del Ejercicio **615**)*

Emplear los cambios de variable apropiados para evaluar las siguientes integrales:

617 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$, *siendo D el recinto limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.*

618 $\displaystyle\iiint_S \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz$, *donde*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Ayuda:

$$\int \sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{r}{2}\sqrt{1 + r^2} + \frac{1}{2}\log(r + \sqrt{1 + r^2}) + cte.$$

Encontrar los siguientes volúmenes:

619 *Sólido limitado por $x^2 + y^2 = z$, el plano XY y $x^2 + y^2 = 2x$. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).*

620 *Sólido limitado superiormente por* $x^2+y^2+z^2 = 25$ *e inferiormente por* $z-1 = \sqrt{x^2+y^2}$. *(Indicación: usar coordenadas cilíndricas).*

621 *Sólido limitado por* $z^2 = 1+x^2+y^2$ *y la parte superior de* $z^2 = 2(x^2+y^2)$. *(Indicación: usar coordenadas cilíndricas).*

622 *Cono circular recto con radio de la base* r *y altura* h. *(Indicación: usar coordenadas esféricas).*

623 *Volumen comprendido entre los paraboloides* $z = x^2+y^2$, $z = 12-x^2-2y^2$.

Solución:

619 El sólido descrito por las condiciones dadas está representado en la Figura 40. Intentemos describirlo en coordenadas

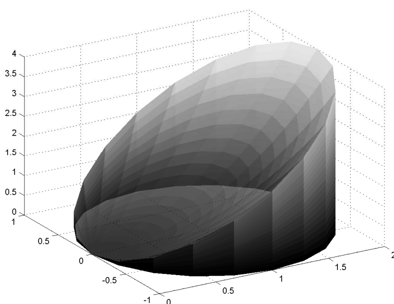


Figura 40. Sólido del Ejercicio **619**

cilíndricas. Observamos que la base de la región que nos ocupa es el círculo $x^2+y^2 = 2x$ que es el centrado en $(1,0)$ y radio 1 (esto se ve completando cuadrados como hemos hecho en alguna otra ocasión). En coordenadas polares (o cilíndricas) este círculo se describe como

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$$

Finalmente la variable z será $0 \leq z \leq r^2$ al ser el paraboloide $z = x^2+y^2$ la parte que limita superiormente la región. El

volumen será por tanto, debido a la simetría,

$$V = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Las integraciones respecto a z y a r no plantean ninguna dificultad. Llegamos así a

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta\, d\theta.$$

Para realizar esta última integración usamos la fórmula

$$\cos^4 \theta = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos(4\theta)}{8},$$

que puede ser obtenidas con facilidad usando las fórmulas del ángulo doble repetidamente (véase el Ejercicio **535**). El resultado final es $\frac{3\pi}{2}$.

622 Según el boceto de la Figura 41, el cono circular recto objeto de este problema se describe en coordenadas esféricas como

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \arctan\left(\frac{r}{h}\right), \quad 0 \le \rho \le \frac{h}{\cos\phi}.$$

Nótese que $\rho = \frac{h}{\cos\phi}$ corresponde a la tapa superior del cono

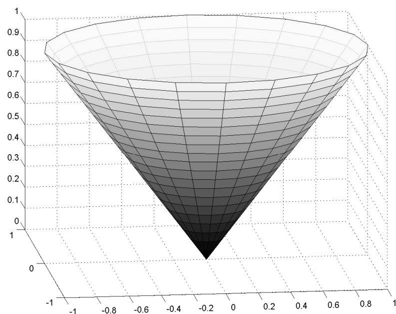


Figura 41. Ejercicio **622**: cono circular recto

$z = h$. De este modo el volumen solicitado será

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan(\frac{r}{h})} \int_0^{h/\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Después de unas cuantas integraciones inmediatas, y con un poco de cuidado en los cálculos, llegamos a la fórmula del volumen de un tal cono: $\frac{\pi}{3}hr^2$.

623 El volumen pedido en esta ocasión es el limitado por los dos paraboloides de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 12 - x^2 - 2y^2$ según el boceto de la Figura 42. La intersección de ambos paraboloides (proyectada en el plano XY) tendrá por ecuación

$$x^2 + y^2 = 12 - x^2 - 2y^2,$$

es decir, se trata de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación sugiere plantear el problema en las coordena-

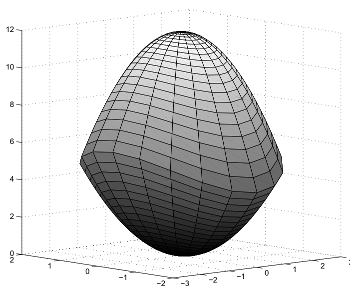


Figura 42. Gráfica del Ejercicio **623**

das cilíndricas modificadas siguientes

$$x = \sqrt{6}r\cos\theta, \quad y = 2r\operatorname{sen}\theta.$$

Así, el nuevo sistema de coordenadas la elipse será $r = 1$ mientras que el jacobiano del cambio se calcula muy sencillamente y es $2\sqrt{6}r$. En consecuencia, el volumen que se pide

se calculará mediante la integral triple

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{6r^2\cos^2\theta+4r^2\operatorname{sen}^2\theta}^{12-6r^2\cos^2\theta-8r^2\operatorname{sen}^2\theta} 2\sqrt{6}r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Después de unos cuantos cálculos sencillos pero cuidadosos llegamos al resultado final $12\sqrt{6}\pi$.

624 *Describir la superficie dada en coordenadas esféricas por la ecuación $\rho = 1+\cos\phi$ y calcular su volumen.*

Calcular el valor de las siguientes integrales empleando para ello un cambio de variables oportuno:

625 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dy\,dx.$

626 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$

627 $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx.$

628 $\displaystyle\int_D ze^{x^2+y^2}\,dV$ *en el recinto D limitado por el interior del círculo $x^2+y^2=4$ y $2\le z\le 3$.*

629 $\displaystyle\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dV$ *con $D=\{x^2+z^2\le 2,\ -2\le y\le 3\}$.*

Solución:

626 Si nos fijamos en el recinto de integración en el plano, descubriremos que se trata del primer cuadrante del círculo unidad. Además el integrando se transforma de manera muy cómoda a coordenadas polares. Esto sugiere intentar calcular esta integral doble mediante coordenadas polares. De esta manera el recinto de integración es

$$0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

La integral pedida se transforma (sin olvidar el jacobiano del cambio) en

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2}\, dr\, d\theta.$$

Esta integral es inmediata. Su valor final es $\frac{\pi}{4}\log 2$.

627 En este caso el recinto de integración es el primer cuarto del círculo de radio 1 centrado en el punto $(1,0)$. Esto es sencillo de comprobar si nos percatamos de que la ecuación $y=\sqrt{2x-x^2}$ puede escribirse como parte de $(x-1)^2+y^2=1$. Esta ecuación se escribe en polares, $r=2\cos\theta$, sin más que realizar las operaciones del cambio. No obstante, al escribir la descripción de este recinto de integración en coordenadas polares debemos ser cuidadosos en los límites para r pues el recinto de integración está delimitado por la recta $x=1$ y el arco del primer cuarto del círculo indicado (véase la Figura 43). En consecuencia los límites de integración serán

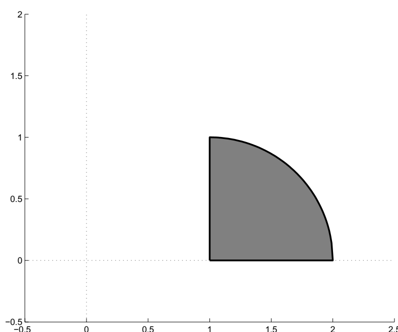


Figura 43. Gráfica del Ejercicio **627**

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{1}{\cos\theta} \le r \le 2\cos\theta.$$

El integrando también se transforma de manera muy transparente a coordenadas polares. Mediante el cambio a polares

la integral pasa a ser

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} dr\, d\theta.$$

Haciendo un cambio trigonométrico del tipo $t = \operatorname{sen}\theta$ y después de algunos cálculos sencillos se obtiene finalmente el valor $\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})$.

629 La región de integración consiste en un cilindro recto con eje a lo largo del eje Y. Esto sugiere realizar un cambio a cilíndricas considerando las coordenadas polares en el plano XZ en vez de en el plano XY. O alternativamente podemos intercambiar los nombres de las variables y y z y observar que el valor de la integral no cambia

$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

con $D = \left\{x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3\right\}$. Esta integral en coordenadas cilíndricas queda

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-2}^{3} (r^2 + z^2) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Todas las integraciones involucradas ahora son inmediatas. Con un poco de paciencia, encontramos el valor final $\frac{100\pi}{3}$.

630 *Si D es la región limitada por las superficies $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$, escribir y evaluar en coordenadas cilíndricas la integral:*

$$\int_D (zx + y)\, dV.$$

631 *Si D es la región en el espacio limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $y \geq 0$, escribir y evaluar la siguiente integral usando coordenadas esféricas:*

$$\int_D (x + y + z)\, dV.$$

632 *Calcular el valor de la integral:*

$$I = \int_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$$

donde D es el recinto limitado por las desigualdades:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Solución 632:

Nótese cómo la desigualdad $x^2+y^2+z^2 \leq y+z$ se puede reescribir completando cuadrados como

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, vemos claramente que la región de integración D corresponde a la intersección de la esfera sólida centrada en $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ con radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ con el primer octante $x, y, z \geq 0$. El boceto

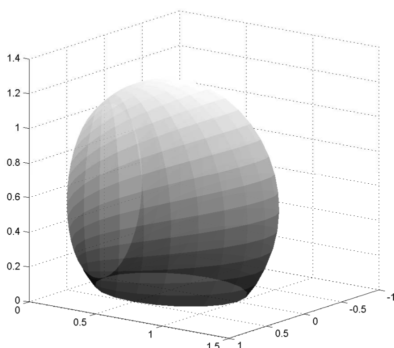


Figura 44. Ejercicio **632**: esfera desplazada en el primer octante

de esta región (Figura 44) nos permite ver que al cambiar a coordenadas esféricas los ángulos θ y ϕ deben moverse en el rango $(0, \frac{\pi}{2})$ mientras que el radio ρ debe limitarse precisamente por la ecuación

de la cáscara de la esfera anterior. La ecuación $x^2+y^2+z^2=y+z$ en coordenadas esféricas es $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\phi$. En consecuencia la región de integración D en coordenadas esféricas es

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\phi,$$

y la integral solicitada será

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\phi} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

La integración respecto a ρ conduce a

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}\phi \cos\phi\right) \, d\phi \, d\theta.$$

Mediante las fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1-\cos(2\phi)}{2}, \quad \operatorname{sen}\phi\cos\phi = \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2},$$

las integraciones anteriores son inmediatas. Después de unos cuantos cálculos cuidadosos se obtiene el valor final de la integral $\frac{\pi}{2}$.

633 *Encontrar el volumen encerrado por las dos esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+(y-1)^2+z^2=1$.*

Solución 633:

La región cuyo volumen se solicita es la intersección de las esferas de radio unitario centradas en el origen y el punto $(0,1,0)$, respectivamente. Si tenemos en cuenta que el corte de tales esferas tiene lugar en el plano $y=\frac{1}{2}$ y su proyección sobre el plano XZ tiene por ecuación $x^2+z^2=\frac{3}{4}$, debido a la simetría, el volumen que buscamos será el doble del volumen del casquete

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

Debido de nuevo a la simetría, y por comodidad, podemos cambiar el nombre de las variables y calcular el volumen del casquete

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq z \leq 1.$$

En coordenadas cilíndricas, este volumen se calcula cómodamente

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{2}\right) r\,dr\,d\theta.$$

Las primitivas involucradas son inmediatas mediante cambios de variable apropiados. El valor del volumen es $\frac{5\pi}{12}$.

634 *Encontrar el volumen de la región del primer octante limitada por la esfera $\rho = \alpha$, el cilindro $r = \alpha$ y el plano $z = \alpha$.*

635 *Encontrar el volumen encerrado por la superficie determinada por las condiciones $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.*

636 *Hallar el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación*

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

Solución 636:

La forma de la ecuación de la superficie proporcionada sugiere el cambio de coordenadas esféricas modificado por los factores a, b y c, del siguiente modo

$$x = a\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad y = b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = c\rho\cos\phi.$$

De esta manera, la superficie se convierte, después de algunas simplificaciones, en

$$\rho^2 = -\cos(2\phi).$$

Esta ecuación nos obliga a tomar el ángulo ϕ entre los límites $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ que es el rango en que $\cos(2\phi)$ es negativo. En efecto, es en este rango en el que se encuentra la superficie que limita el volumen que debemos calcular. Nótese que ahora el jacobiano del cambio es el de las coordenadas esféricas $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$ modificado por el factor abc. La integral que debemos calcular es

$$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{\sqrt{-\cos(2\phi)}} abc\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{abc\pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

Calcular el volumen determinado por la expresiones siguientes:

637 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

638 $x^2 + 2(y^2 + z^2) \leq 10$ y $z^2 + y^2 \leq 1$.

639 $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

640 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$ y $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

641 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $2x^2 \geq z^2 + y^2$.

642 $y^2 + 4z^2 = 4$, $x = 0$ y $x = y + 2$.

Solución:

640 La región cuyo volumen debemos calcular es la representada en la Figura 45. En coordenadas cilíndricas tendremos que dicho volumen se calcula mediante la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \left(5 + \sqrt{5 - r^2} - \sqrt{5}r\right) r\, dr\, d\theta.$$

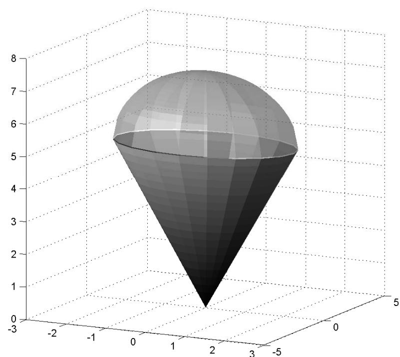


Figura 45. Gráfica del Ejercicio **640**

Las primitivas involucradas son fáciles y unos cuantos cálculos conducen al resultado final

$$\frac{10\pi}{3}\left(\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right).$$

642 La región cuyo volumen se debe encontrar está dibujada en el boceto que acompaña (Figura 46). En coordenadas rectangulares, este volumen viene dado por la integral doble

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{y+2}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}\,dx\,dy.$$

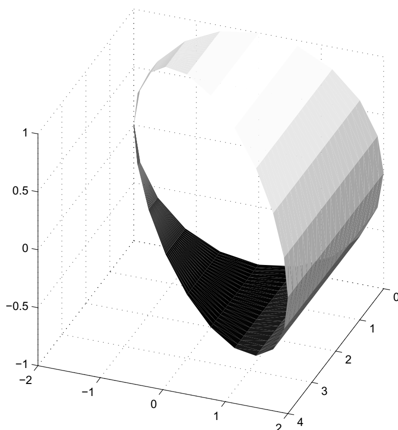


Figura 46. Representación gráfica del Ejercicio **642**

Estas integraciones no son inmediatas en absoluto de modo que intentamos calcular el volumen en un sistema de coordenadas distinto. En concreto, y por comodidad, intercambiamos el nombre de las variables x y z, y nos preocupamos por encontrar el volumen limitado por las superficies

$$z=0,\quad z=y+2,\quad x^2+\frac{y^2}{4}=1.$$

En coordenadas cilíndricas modificadas por un factor 2 para y, dicho volumen viene dado por la integral

$$2\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}(2+2r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Después de algunos cálculos sencillos, el resultado final es 4π.

643 *Calcular la integral*

$$I = \int_R \frac{z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\, dV$$

donde R es la región determinada por las desigualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

644 *Encuentra el volumen encerrado por las superficies $x^2 + y^2 + z = 1$ y $x^2 + (y - 1)^2 - z = 0$.*

Solución 644:

Se trata de encontrar el volumen encerrado por los dos paraboloides de la Figura 47.

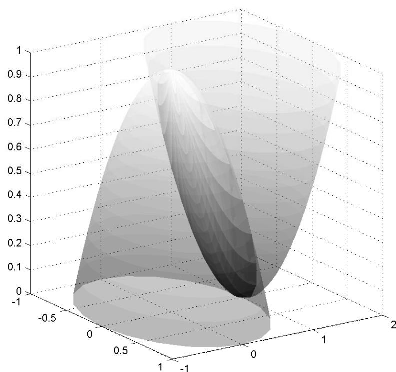


Figura 47. Gráfica del Ejercicio **644**

La proyección de dicha intersección sobre el plano XY tendrá por ecuación

$$1 - x^2 - y^2 = x^2 + (y - 1)^2.$$

Después de algunos cálculos y completar cuadrados, esta ecuación se convierte en

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

que es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $(0, \frac{1}{2})$. En coordenadas polares la integral queda

$$\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \big((1-r^2) - (r^2 - 2r\operatorname{sen}\theta + 1)\big)\, r\, dr\, d\theta.$$

La integración respecto a r desemboca en la integral

$$\frac{1}{6}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta.$$

Mediante la fórmula del ángulo doble, usada dos veces consecutivas, obtenemos que

$$\operatorname{sen}^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta),$$

y por tanto la integral anterior se calcula de manera directa y vale $\frac{\pi}{16}$.

645 *Hallar el volumen de la región*

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}.$$

646 *Calcular el volumen encerrado por las dos superficies* $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$, *y* $z = x$.

Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas polares:

647 $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{9-r^2}\, dr\, d\theta.$

648 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r^3\, dr\, d\theta.$

649 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{-\cos\theta} r\tan\theta\, dr\, d\theta.$

Solución 649:

La región de integración corresponde a

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq -\cos\theta.$$

La ecuación $r = -\cos\theta$ corresponde, en coordenadas cartesianas a

$$x^2 + y^2 + x = 0,$$

que, después de completar cuadrados, vemos que se trata del círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $(-\frac{1}{2}, 0)$. Los límites para el ángulo nos informan de que sólo una parte de tal círculo es la región de integración. En concreto se trata de la parte $y \geq -x$ sobre la diagonal secundaria. Así, la región de integración se describe en cartesianas como

$$x^2 + y^2 + x \leq 0, \quad y + x \geq 0.$$

El integrando corresponde a $\tan\theta$ (después de "descontar" el jacobiano r). Dicha función en cartesianas corresponde a $\frac{y}{x}$. Finalmente las soluciones del sistema

$$x^2 + y^2 + x = 0, \quad y + x = 0,$$

nos dan los límites de integración para la variable x. En definitiva encontramos que se trata de la integral

$$\int_{-1/2}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{-x-x^2}} \frac{y}{x}\, dy\, dx.$$

Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas cilíndricas:

650 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{r^2} zr^2 \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta.$

651 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\cos\theta}} \int_0^r r^2\, dz\, dr\, d\theta.$

652 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{|2\operatorname{sen}\theta|}\int_0^1 r^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,dz\,dr\,d\theta.$

Solución 651:

El integrando corresponde a $r=\sqrt{x^2+y^2}$ después de descontar el jacobiano del cambio. Los límites de integración para z son claramente $0\le z\le r=\sqrt{x^2+y^2}$. El punto más delicado consiste en hacerse una idea de la curva $r=\sqrt{\cos\theta}$. Lo que está claro es que se trata de una curva cerrada en el semiplano derecho $x\ge 0$ contenida en la banda $0\le x\le 1$. Esto nos lleva a concluir que los límites para x son $0\le x\le 1$. Para determinar los límites para la variable y, debemos transformar la ecuación $r=\sqrt{\cos\theta}$ a cartesianas. Elevando al cuadrado y multiplicando por r, no es difícil llegar a $(x^2+y^2)^3=x^2$. Si despejamos y, tendremos

$$-\sqrt{x^{2/3}-x^2}\le y\le\sqrt{x^{2/3}-x^2}.$$

La integral completa en cartesianas será por tanto

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{x^{2/3}-x^2}}^{\sqrt{x^{2/3}-x^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx.$$

Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas esféricas.

653 $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

654 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\phi}\rho^4\operatorname{sen}^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

655 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4}\rho^3\operatorname{sen}(2\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

Solución 654:

Después de descontar el jacobiano del cambio a esféricas $\rho^2\operatorname{sen}\phi$, el integrando queda $\rho^2\operatorname{sen}^2\phi$ que en coordenadas cartesianas se puede escribir como x^2+y^2.

Para determinar la región de integración, debemos aclarar qué figura representa $\rho = 2\cos\phi$. Si multiplicamos por ρ, deducimos que se trata de $x^2+y^2+z^2 = 2z$ y completando cuadrados llegamos a

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Es por tanto la esfera de radio unitario centrada en $(0,0,1)$. Los límites $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ indican que sólo consideramos la parte de dicha esfera sobre el cono $\phi = \frac{\pi}{4}$, mientras que los límites $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ indican que únicamente la parte de la región con $x \ge 0$ nos interesa. El cono $\phi = \frac{\pi}{4}$ corresponde a la ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Así pues la intersección de dicho cono con la esfera de antes corresponde al círculo unitario $x^2+y^2 = 1$. Finalmente la integral en coordenadas cartesianas será

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\,dz\,dx\,dy.$$

Nótese que los límites para x e y provienen de la descripción de la región plana $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$. Los límites para z surgen del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$, despejando z en ambos casos.

CAPÍTULO 4

Integrales de línea y de superficie

Los ejercicios propuestos en este tema estarán dedicados a la integración sobre curvas y superficies de campos escalares y vectoriales. Tales integrales están relacionadas con diversos conceptos físicos de gran importancia, aunque el punto de vista que llevamos a cabo aquí será esencialmente teórico. La primera parte de los ejercicios se refieren a la integración de línea, mientras que la segunda se centrará en las integrales de superficies. Para introducir el uso de estos objetos incluimos dos breves secciones que tratarán sobre curvas en el plano y en el espacio, y superficies en $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Al igual que en el tema anterior, la dificultad fundamental reside en la correcta comprensión y visualización de estos elementos, con especial atención al cálculo de parametrizaciones. También incluimos una breve sección relacionada con el cálculo de potenciales escalares de campos vectoriales.

Sección 4.1

Curvas en el plano y el espacio

Esbozar las curvas siguientes indicando el sentido en el que se recorren:

656 $\sigma(t) = (0, \cos(\pi t))$, $t \in [-1, \frac{1}{3}]$.

657 $\sigma(t) = (2t - 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

658 $\sigma(t) = (t^2, -t)$, $t \geq 0$.

659 $\sigma(t) = (2\cos t, -\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

660 $\sigma(t) = (e^t, 4e^{2t})$, $t \in \mathbb{R}$.

661 $\sigma(t) = (\sec t, \tan t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solución:

659 Atendiendo a las coordenadas polares dilatadas, podemos fácilmente deducir que la curva $(2\cos t, -\operatorname{sen} t)$ corresponde a un cuarto de la elipse de centro el origen y semiejes 2 y 1. El origen está en el punto $(2, 0)$ y el extremo final en el punto $(0, -1)$, recorrida en sentido negativo (ver Figura 48(a)).

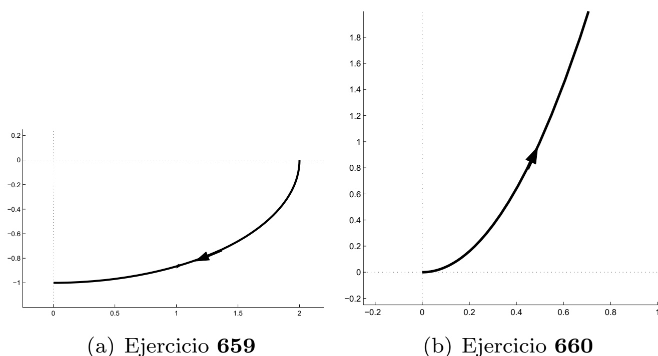
660 Está claro que la curva satisface $y = 4x^2$, por lo que corresponde a un trozo de dicha parábola. Teniendo en cuenta que si $t \to -\infty$, entonces $e^t \to 0$, se trata de la rama derecha de la parábola $y = x^2$ si incluir al origen (ver Figura 48(b)) recorrida hacia arriba.

Encontrar una parametrización para las curvas planas descritas a continuación:

662 *El segmento que une los puntos* $(-3, 2)$ *y* $(4, 0)$.

663 *El círculo con centro el origen y radio* 6.

664 *El cuarto de círculo con centro en* $(0, 0)$ *cuyos puntos extremos son* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *y* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.



(a) Ejercicio **659** (b) Ejercicio **660**

Figura 48. Curvas parametrizadas

665 *El grafo de* $y = \tan x$ *para* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

666 *El cuadrado de vértices* $(3, 0)$, $(3, 3)$, $(0, 3)$ *y* $(0, 0)$.

667 *La rama izquierda de la hipérbola* $2x^2 - 3y^2 = 1$.

Solución:

664 Se trata de un cuarto del círculo unitario centrado en el origen. La única precaución se refiere a delimitar bien el rango en el que se debe mover el parámetro que representa el ángulo. Una parametrización puede ser

$$\sigma(\theta) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta), \quad \theta \in (-\pi/4, \pi/4).$$

666 Como el cuadrado que nos solicitan consta de cuatro segmentos rectos, una posibilidad consiste en parametrizar esos cuatro lados de manera independiente. Así tendríamos

$$\begin{aligned}
&\sigma(t) = (3t, 0), \quad t \in [0, 1] \quad \text{para el primer segmento,}\\
&\sigma(t) = (3, 3t - 3), \quad t \in [1, 2] \quad \text{para el segundo segmento,}\\
&\sigma(t) = (9 - 3t, 3), \quad t \in [2, 3] \quad \text{para el tercer segmento,}\\
&\sigma(t) = (0, 12 - 3t), \quad t \in [3, 4] \quad \text{para el último segmento.}
\end{aligned}$$

Dejamos al lector comprobar que una parametrización más compacta se puede dar mediante

$$\sigma(t) = \frac{3}{2}(1,1) + \frac{3}{2}\frac{1}{\text{máx}(|\cos t|\,, |\text{sen}\, t|)}(\cos t, \text{sen}\, t),\ t \in [0, 2\pi].$$

668 *Probar que la función* $\sigma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, *es una parametrización del círculo* $x^2 + y^2 = 1$ *excepto un punto, que habrá que determinar.*

Solución 668:

Se trata de comprobar en primer lugar que si ponemos

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2},$$

entonces se tiene que $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, lo que significa que la imagen de $\sigma(t)$ está contenida en el círculo unitario para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es una comprobación inmediata. En segundo lugar debemos determinar si todos los puntos del citado círculo se alcanzan. Para ello suponemos dado un punto (x, y) de tal círculo e intentamos determinar el valor del parámetro t para que se tenga

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = x, \quad \frac{2t}{1+t^2} = y.$$

Determinar el valor de t significa en este caso despejar t de las dos ecuaciones anteriores. De la primera ecuación obtenemos

$$t^2 = \frac{1-x}{1+x},$$

de donde concluimos que cuando $x = -1$, y por tanto $y = 0$, no podremos encontrar el valor apropiado de t. Obsérvese que cuando $y = 0$, $t = 0$ y $x = 1$. En consecuencia el punto $(-1, 0)$ no se encuentra contenido en la parametrización dada.

Encontrar la ecuación de la tangente a las siguientes curvas paramétricas en el punto correspondiente al valor de t dado:

669 $\sigma(t) = (2t^2 + 1, 3t^3 + 2)$, $t = 1$.

670 $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t = \frac{\pi}{4}$.

671 $\sigma(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t)$, $t = \frac{\pi}{2}$.

672 $\sigma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, $t = 1$.

Calcular las longitudes de arco para las curvas siguientes:

673 $\sigma(t) = (\cos t, \frac{3}{5} \operatorname{sen} t, -\frac{4}{5} \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

674 $\sigma(t) = (2t, t^2, \log t)$, $t > 0$, *entre* $(2, 1, 0)$ *y* $(4, 4, \log 2)$.

675 $\sigma(t) = (a(\cos t + t \operatorname{sen} t), a(\operatorname{sen} t - t \cos t))$, $t \in [-\pi, \pi]$.

676 $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

677 $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{t}2)$, $t \in [0, 1]$.

678 $\sigma(t) = (2(t^2 - 1)^{3/2}, 3t^2, 3t^2)$, $t \in [0, \sqrt{8}]$.

679 $\sigma(t) = (\log(\cos t), t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

680 $\sigma(t) = (3t \operatorname{sen} t, 3t \cos t, 2t^2)$, $t \in [0, \frac{4}{5}]$.

Solución:

674 Es bien conocido que la fórmula del arco de longitud de una curva con parametrización

$$\sigma(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

viene dada por la integral definida

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\sigma'(t)| \, dt.$$

En este caso concreto, tendremos que

$$\sigma'(t) = (2, 2t, \frac{1}{t}), \quad t \in [1, 2].$$

La longitud solicitada será por tanto

$$L = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} \, dt.$$

Después de unos cuantos cálculos, y completando cuadrados llegamos a

$$L = \int_1^2 \frac{2t^2+1}{t}\,dt = t^2 + \log t\Big|_1^2 = 3 + \log 2.$$

680 En este ejemplo el vector tangente es

$$\sigma'(t) = (3\operatorname{sen} t + 3t\cos t, 3\cos t - 3t\operatorname{sen} t, 4t)\,,$$

de modo que su longitud después de desarrollar los cuadrados y tener en cuenta alguna cancelación, resulta ser

$$|\sigma'(t)|^2 = 9 + 25t^2.$$

Por tanto, la longitud de arco nos lleva a preocuparnos por calcular la integral definida

$$L = \int_0^{4/5} \sqrt{9+25t^2}\,dt.$$

Esta integral es un tanto tediosa de calcular. Mediante el cambio de variable $x^2 = \dfrac{25+9t^2}{t^2}$ se llega al resultado final de $2 + \frac{9}{10}\log 3$

Encontrar la longitud de arco de las siguientes curvas expresadas en forma polar:

681 $r = \cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

682 $r = \theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

683 $r = \theta^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

684 $r = \sec\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Solución 683:

La fórmula de la longitud de arco de una curva dada en polares

$$r = r(\theta), \quad \theta_0 \le \theta \le \theta_1,$$

es

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\,d\theta.$$

Esta fórmula proviene de que para una tal curva, una posible parametrización es

$$\sigma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta), \quad \theta_0 \le \theta \le \theta_1.$$

Si aplicamos la fórmula usual de la longitud de arco para una curva con esta parametrización, obtenemos la integral anterior.

En este ejemplo, la longitud se calcula a través de la integral

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta.$$

Factorizando y sacando del radical θ^2, llegamos a la integral

$$\int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4+\theta^2}\, d\theta.$$

Esta integral es inmediata obteniéndose

$$L = \frac{1}{3}\left(4+\theta^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left[\left(1+\pi^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

Sección 4.2

Integrales de línea

Evaluar las integrales de trayectoria para las funciones y curvas siguientes:

685 $f(x,y) = 9 + 8\sqrt{y}$, $\sigma(t) = (2t\sqrt{t}, t^2)$, $t \in [0,1]$.

686 $f(x,y) = y$, $\sigma(t) = (t, t^3)$, $t \in [-1,0]$.

687 $f(x,y,z) = (1 + \frac{9}{4}z^{2/3})^{1/4}$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^{3/2})$, $t \in [0, \frac{20}{3}]$.

688 $f(x,y,z) = x\cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, *para* $t \in [0,1]$.

689 $f(x,y,z) = \frac{x+y}{z+y}$, $\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, *para* $t \in [1,2]$.

690 $f(x,y,z) = \frac{1}{y^3}$, $\sigma(t) = (\log t, t, 2)$, *con* $t \in [1,2]$.

691 $f(x, y, z) = x + \cos^2 z$, $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$.

692 $f(x, y) = x + y$, $\sigma \equiv$ *triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *y* $(0, 1)$.

Solución:

689 La fórmula para calcular la integral de una función escalar sobre una curva es

$$I = \int_\sigma f = \int_{t_0}^{t_1} f(\sigma(t))\, |\sigma'(t)|\ dt.$$

En este ejemplo concreto tendremos

$$f(\sigma(t)) = 1$$

pues $x = z$ sobre la curva σ. Además

$$\sigma'(t) = (1, \sqrt{t}, 1), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{2 + t}.$$

Por tanto

$$I = \int_1^2 \sqrt{2 + t}\, dt = \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right).$$

691 Calculamos

$$\sigma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1),\ |\sigma'(t)| = \sqrt{2},$$
$$f(\sigma(t)) = \operatorname{sen} t + \cos^2 t.$$

Así, la integral que nos solicitan será

$$I = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \cos^2 t)\sqrt{2}\, dt.$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo doble

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2},$$

la integral anterior sale inmediatamente. Su valor final es $\pi\sqrt{2}$.

693 *Encontrar el promedio de la coordenada y en la trayectoria dada por $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$, con $t \in [0,1]$.*

Solución 693:

El promedio de la variable y sobre una curva es la integral

$$\frac{1}{\operatorname{long}(\sigma)} \int_\sigma y.$$

Los elementos que nos hacen falta son

$$\begin{aligned}
&\sigma'(t) = (2t, 1, 0), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{1+4t^2},\\
&y(t) = t,\\
&\operatorname{long}(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}-2),\\
&\left[\text{con el cambio } \tfrac{1+4t^2}{t^2} = x^2\right]
\end{aligned}$$

El valor promedio será por tanto

$$\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt.$$

La primitiva que debemos calcular es inmediata con el cambio de variable $s = 1+4t^2$. El resultado final es

$$\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

694 *Sea $f(x,y) = x - y$ y $\sigma(t) = (t^4, t^4)$, para $-1 \le t \le 1$. Representar σ, calcular $\int_\sigma f\, d\sigma$ y la longitud de la curva.*

Evaluar las siguientes integrales de línea $\int_\sigma F \cdot d\sigma$:

695 $F(x,y) = (\operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}^2 x)$, $\sigma(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

696 $F(x,y,z) = (x,y,z)$, $\sigma(t) = (t,t,t)$, *con* $0 \le t \le 1$.

697 $F(x,y,z) = (x,-y,2)$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, *para* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

698 $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{z^2+1}, \frac{x}{1+y^2}, e^y\right)$, $\sigma(t) = \big((1+t^2)^2, 1, t\big)$, *con* $t \in [0,1]$.

699 $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $\sigma \equiv$ *triángulo de vértices* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$.

700 $F(x,y,z) = (ye^{x^2}, xe^{y^2}, \mathrm{ch}(xy^3))$, $\sigma(t) = (e^t, e^t, 3)$, $t \in [0,1]$.

Solución:

698 La integral de un campo F sobre una curva parametrizada por σ es la integral

$$I = \int_\sigma F = \int_{t_0}^{t_1} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt,$$

donde $[t_0, t_1]$ es el rango en el que se mueve el parámetro t. En nuestro caso concreto necesitamos las expresiones

$$\sigma'(t) = (2(1+t^2)2t, 0, 1), \quad F(\sigma(t)) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{(1+t^2)^2}{2}, e\right),$$
$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = e + 4t.$$

La integral que nos piden será por tanto

$$I = \int_0^1 (e + 4t)\ dt.$$

Esta integral es inmediata. Su valor es $2 + e$.

700 Igual que en el ejercicio anterior, necesitamos calcular las expresiones

$$\sigma'(t) = (e^t, e^t, 0), \quad F(\sigma(t)) = \left(e^t e^{e^{2t}}, e^t e^{e^{2t}}, \mathrm{ch}(e^{4t})\right),$$
$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 2e^{2t} e^{e^{2t}}.$$

La integral que nos interesa es

$$I = \int_0^1 2e^{2t} e^{e^{2t}}\, dt.$$

El cambio de variable $s = e^{2t}$ convierte esta integral en inmediata

$$I = \int_1^{e^2} e^s\, ds = e^{e^2} - e.$$

Evaluar las siguientes integrales:

701 $\int_\sigma x\,dy - y\,dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, *para* $0 \le t \le 2\pi$.

702 $\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$, $\sigma(t) = (t, t^4, 0)$, *con* $0 \le t \le 1$.

703 $\int_\sigma x^2\,dx + xy\,dy + dz$, $\sigma(t) = (t, t^2, 1)$, *para* $0 \le t \le 1$.

704 $\int_\sigma \operatorname{sen} z\,dx + \cos z\,dy - (xy)^{1/3}\,dz$, $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t)$, *para* $0 \le t \le \frac{7\pi}{2}$.

Solución:

702 Sobre la parametrización

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^4, \quad z(t) = 0,$$

tendremos

$$dx = 1, \quad dy = 4t^3, \quad dz = 0,$$

y por tanto

$$I = \int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$$

vendrá dada por

$$I = \int_0^1 \left(t^4 + (3t^{12} - t)4t^3\right)\,dt.$$

Después de realizar las operaciones indicadas e integrar el polinomio resultante encontramos el valor de la integral $\frac{3}{20}$.

704 En este ejemplo tenemos

$$\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t),$$
$$\sigma'(t) = \left(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t, 1\right).$$

La integral de línea que nos piden será

$$I = \int_0^{7\pi/2} \left(-3\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t \cos t\right)\,dt,$$

es decir,

$$I = -\int_0^{7\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{7\pi/2} = -\frac{1}{2}.$$

Hallar el valor de las siguientes integrales de línea a lo largo de las curvas dadas:

705 $\int_C xe^y \, dx + x^2 y \, dy$, *con* C *el segmento recta* $y = 3$ *con* $0 \leq x \leq 2$.

706 $\int_C \cos x \, dx + \operatorname{sen} y \, dy$, *con* C *el trozo de recta* $y = x$ *entre* $x = 0$ *y* $x = \pi$.

707 $\int_C (x + y) \, dx - 3xy \, dy$, *con* C *la curva* $x^2 + y^2 = 4$.

708 $\int_C yz^2 \, dx + xz^2 \, dy + 2xyz \, dz$, *con* C *la curva que une los puntos* $(-1, 2, -2)$ *y* $(1, 5, 2)$ *a través de tres segmentos paralelos a los ejes* Z, X *e* Y, *en ese orden.*

Solución:

707 En este caso, la curva nos la determinan mediante su ecuación $x^2 + y^2 = 4$, de modo que debemos dar una parametrización de la misma. Como se trata del círculo centrado en el origen y radio 2, sabemos que una posible descripción es

$$\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nótese además que como no nos precisan una orientación de la curva elegimos la determinada por la propia parametrización anterior. Con esta parametrización la integral que nos interesa queda

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-4 \operatorname{sen} t \cos t - 4 \operatorname{sen}^2 t - 24 \cos^2 t \right) \, dt.$$

Es sencillo comprobar que los términos primero y tercero tienen integral nula, mientras que el segundo, usando la fórmula del ángulo doble, vale -4π, que es por tanto el valor solicitado.

708 La curva C consta de tres partes correspondientes a los segmentos paralelos a los ejes coordenados que unen los puntos $(1,5,2)$ y $(-1,2,-2)$. En concreto tendremos tres contribuciones a la integral, correspondientes a cada uno de los segmentos de que consta la curva C. La primera parte de C se parametriza como

$$\sigma_1(t) = (-1, 2, -2+4t), \quad t \in [0,1].$$

La parte de la integral correspondiente a esta parametrización será

$$I_1 = -\int_0^1 16(4t-2)\,dt = 0.$$

La segunda contribución corresponde a la parametrización

$$\sigma_2(t) = (2t-1, 2, 2), \quad t \in [0,1].$$

La contribución a la integral asociada a esta parametrización es

$$I_2 = \int_0^1 16\,dt = 16.$$

Finalmente, tenemos

$$\sigma_3(t) = (1, 2+3t, 2), \quad t \in [0,1],$$

y

$$I_3 = \int_0^1 12\,dt = 12.$$

La integral total es la suma de esta tres contribuciones, resultado igual a 28.

709 *Evaluar la integral de $F(x,y) = (x,y)$ alrededor de la hipocicloide*

$$\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

710 *Evaluar $\int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz$, donde C es el trozo de recta que une los puntos $(1,1,1)$ y $(1,2,4)$.*

711 *Esbozar la curva paramétrica* $\sigma(t) = (t^3, \operatorname{sen}(t^3))$, *con* $t \in [0, \sqrt[3]{\pi}]$. *Si* $f(x, y) = \sqrt{2 - y^2}$, *calcular* $\int_\sigma f\, d\sigma$.

712 *Esbozar la curva en el espacio* $\sigma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \operatorname{sen} t, t)$, *con* $0 \leq t \leq 4\pi$. *Si* $f(x, y, z) = z(2 + \sqrt{x^2 + y^2})$, *encontrar* $\int_\sigma f\, d\sigma$.

Solución 712:

Para hacernos una idea de qué curva en el espacio representa la parametrización

$$\sigma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \operatorname{sen} t, t), \quad t \in [0, 4\pi],$$

observamos que en coordenadas cilíndricas tenemos $z = \sqrt{r}$. Como la superficie de ecuación $z = \sqrt{r}$ es de revolución, su boceto se obtiene haciendo rotar alrededor del eje Z el grafo de la función raíz cuadrada. La curva se "enrolla" alrededor de esta superficie según la Figura 49. Para calcular la integral que nos piden, necesitamos

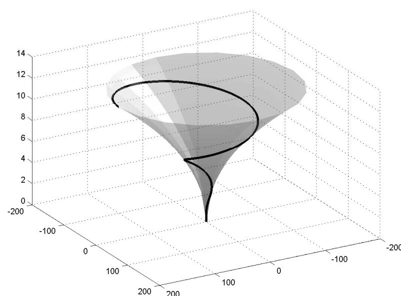


Figura 49. Ejercicio **712**: curva sobre $z = \sqrt{r}$

las expresiones siguientes

$$f(\sigma(t)) = t(2 + t^2), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + t^4}.$$

En concreto,

$$I = \int_0^{4\pi} (2t + t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}\, dt.$$

Mediante el cambio de variable $s = 1+4t^2+t^4$, la integral anterior se convierte en

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{1+64\pi^2+256\pi^4} \sqrt{s}\, ds = \frac{1}{6}\left[\left(1+64\pi^2+256\pi^4\right)^{3/2} - 1\right].$$

Sea $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$*. Evaluar* $\int_C F$ *para cada una de las curvas siguientes:*

713 *El semicírculo* $y = \sqrt{4-x^2}$ *desde* $(2,0)$ *hasta* $(-2,0)$.

714 *El semicírculo* $y = -\sqrt{4-x^2}$ *desde* $(2,0)$ *hasta* $(-2,0)$.

715 *El segmento de* $(2,0)$ *a* $(1,0)$ *seguido del semicírculo definido por* $y = \sqrt{1-x^2}$ *hasta* $(-1,0)$ *y junto con el segmento de* $(-1,0)$ *hasta* $(-2,0)$.

716 *El segmento de* $(2,0)$ *a* $(1,0)$ *seguido del semicírculo dado por* $y = -\sqrt{1-x^2}$ *hasta* $(-1,0)$ *y junto con el segmento de* $(-1,0)$ *hasta* $(-2,0)$.

717 *El círculo* $x^2+y^2 = 4$ *partiendo de* $(2,0)$ *en sentido positivo.*

718 *El círculo* $x^2+y^2 = 1$ *partiendo de* $(1,0)$ *en sentido positivo.*

719 *La elipse* $x^2+4y^2 = 4$ *desde* $(2,0)$ *en sentido positivo.*

720 *El círculo* $(x-2)^2+y^2 = 1$ *partiendo de* $(3,0)$ *en sentido positivo.*

Solución:

713 En este problema precisamos una parametrización de la curva que nos describen. Se trata del semicírculo superior centrado en el origen y radio 2, que se puede parametrizar por

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t), \quad t \in [0,\pi].$$

Para evaluar la integral necesitamos calcular la expresión

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

Tras unos cuantos cálculos sencillos, el valor de esta expresión es igual a 1 para todo t. En consecuencia la integral que interesa vale π.

715 La curva propuesta consta de tres partes

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (2-t, 0), \quad t \in [0,1], \\ \sigma_2(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0,\pi], \\ \sigma_3(t) &= (-1-t, 0), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Si calculamos con un poco de paciencia las tres contribuciones a la integral del campo F, llegamos a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 0\, dt = 0, \\ I_2 &= \int_0^\pi 1\, dt = \pi, \\ I_3 &= \int_0^1 0\, dt = 0, \\ I &= I_1 + I_2 + I_3 = \pi. \end{aligned}$$

719 La parametrización que nos hace falta es

$$\sigma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

El producto escalar $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ es

$$\frac{2}{4\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t},$$

y la integral que interesa

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2\pi. \qquad \left[\text{Cambio } \operatorname{sen}^2 t = x\right]$$

720 La parametrización que necesitamos es

$$\sigma(t) = (2 + \cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

el producto escalar es

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \frac{1 + 2\cos t}{5 + 4\cos t},$$

y la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos t}{5 + 4\cos t}\, dt = 0. \qquad \left[\text{Cambio } \tan\left(\tfrac{t}{2}\right) = x\right]$$

721 *Sea $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ un campo de fuerzas en $\mathbb{R}^3$ dado. Calcular el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula desde el punto $(0, 0, 0)$ al $(1, 2, 4)$ a lo largo del segmento que los une.*

722 *Encontrar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F definido por $F = (z, -x, y)$ al mover una partícula desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el $(2, 4, 8)$ a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = x^3$.*

723 *Hallar el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$, al mover una partícula desde el punto $(-1, 0)$ hasta el $(1, 0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Qué elipse (es decir, qué valor de b) hace mínimo el trabajo?*

724 *Un campo de fuerzas F en $\mathbb{R}^2$ viene dado por la ecuación $F(x, y) = (cxy, x^6y^2)$, con c una constante. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde el punto $(0, 0)$ hasta la recta $x = 1$ siguiendo una curva de la forma $y = ax^b$, con a y b constantes positivas. Encontrar el valor de c (en función de a y de b) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea nulo.*

Solución 724:

El trabajo realizado por un campo de fuerzas al mover una partícula a lo largo de un camino viene dado precisamente por la integral del campo a lo largo de dicha curva. En el ejemplo que nos ocupa, la curva viene dada por la parametrización

$$\sigma(t) = (t, at^b), \quad t \in [0, 1].$$

De este modo el producto escalar que debemos integrar es

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (cat^{b+1}, a^2t^{6+2b}) \cdot (1, abt^{b-1}) = cat^{b+1} + a^3bt^{3b+5}.$$

En consecuencia el trabajo realizado será la integral

$$\int_0^1 \left(cat^{b+1} + a^3bt^{3b+5}\right) dt = \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6}.$$

Si se pretende determinar el valor de c (en función de a y b) para que dicho trabajo sea nulo, debemos exigir

$$\frac{ac}{b+2} + \frac{a^3 b}{3b+6} = 0,$$

de donde se obtiene $c = -\frac{a^2 b}{3}$.

725 *Hallar la masa de un alambre delgado en forma de un cuadrante de circunferencia $x^2+y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, si la función densidad de masa es $\rho(x,y) = x + y$.*

Solución 725:

Cuando una magnitud física se determina por su densidad puntual sobre el cuerpo en el que se haya presente, la cantidad total de dicha magnitud sobre todo el cuerpo es la integral sobre el mismo de dicha densidad. Así, si $\rho(x,y) = x+y$ es la densidad de masa de un alambre fino que tiene la forma del cuarto de círculo $x^2+y^2 = r^2$, $x, y \geq 0$, la masa total del mencionado alambre será

$$\int_C \rho,$$

donde C es el cuarto de círculo. Una parametrización de éste es

$$\sigma(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

de modo que la masa total es la integral

$$\int_0^{\pi/2} (r\cos t + r\,\mathrm{sen}\, t) r\, dt.$$

Nótese cómo $|\sigma'(t)| = r$. El valor de esta integral es sencillo de calcular y vale $2r^2$.

Sección 4.3

Potenciales escalares

Averiguar si los siguientes campos vectoriales son gradientes y encontrar un potencial escalar en caso afirmativo:

726 $F = (2x + y^2, x^2 + 2y)$.

727 $F = (y \cos x, \operatorname{sen} x)$.

728 $F = (3x + 5y, 5x - 2y)$.

729 $F = (\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2})$.

730 $F = (\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y, \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y)$.

731 $F = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + 2xy + y^3)$.

732 $F = (\sqrt{x} + \sqrt{y}, \frac{x}{2\sqrt{y}})$.

733 $F = (\cos x + \log y, \frac{x}{y} + e^y)$.

734 $F = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$.

735 $F = (z \cos(xy) + y \cos(xz), z \cos(xy) + x \cos(yz), y \cos(xz) + x \cos(yz))$.

736 $F = (z \cos(xz) - y \operatorname{sen}(xy), -x \operatorname{sen}(xy), x \cos(xz))$.

737 $F = (y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -xy \operatorname{sen} z - yze^x)$.

Solución:

730 Sabemos que la condición necesaria y suficiente para que un campo definido en todo $\mathbb{R}^3$ sea gradiente es que su rotacional sea nulo. Esta condición se reduce a la igualdad de las derivadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

para un campo en el plano $F = (F_1, F_2)$. En este ejemplo concreto se trata de comprobar dicha igualdad entre las derivadas parciales correspondientes. Un sencillo cálculo hace ver que si

$$F_1(x, y) = \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y, \quad F_2(x, y) = \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$

entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

y por tanto F no es un campo gradiente.

733 Si
$$F = \left(\cos x + \log y, \frac{x}{y} + e^y\right),$$
es sencillo comprobar que sí se da la igualdad de las derivadas parciales correspondientes. Por lo tanto este campo sí es gradiente. Para encontrar un potencial procedemos en dos etapas. En primer lugar si $f(x, y)$ es el potencial que buscamos, debemos tener
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \log y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y} + e^y.$$
Por ejemplo, de la primera igualdad, integrando con respecto a x, llegamos a que
$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + x \log y + g(y),$$
para un cierta función arbitraria $g(y)$. Si derivamos esta expresión con respecto a y e igualamos a F_2 encontramos que la igualdad
$$\frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + e^y$$
debe verificarse. En consecuencia, descubrimos que
$$g(y) = e^y + \text{constante},$$
y llevando esta expresión a f (tomando por ejemplo la constante igual a cero), encontramos el potencial
$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + x \log y + e^y.$$

735 Para saber si un campo en el espacio es gradiente debemos comprobar si su rotacional es nulo. Teniendo en cuenta que si
$$F = (F_1, F_2, F_3)$$
entonces
$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right),$$
es fácil comprobar en este caso que el rotacional del campo F proporcionado no es nulo, pues ya la primera componente no se anula.

737 Es sencillo comprobar que el campo

$$F = (y\cos z - yze^x, x\cos z - ze^x, -xy\,\mathrm{sen}\, z - ye^x)\,,$$

sí es gradiente, pues su rotacional es cero.

Sea $f(x, y, z)$ un potencial del mismo. Procedemos en tres etapas para determinar f. En primer lugar, debemos exigir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = y\cos z - yze^x,$$

de donde integrando con respecto a x, se obtiene

$$f(x, y, z) = yx\cos z - yze^x + g(y, z),$$

siendo g una función de (y, z). En segundo lugar, debemos tener

$$x\cos z - ze^x = F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos z - ze^x + \frac{\partial g}{\partial y},$$

de donde

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

y en consecuencia $g = g(z)$. Finalmente, exigimos

$$-xy\,\mathrm{sen}\, z - ye^x = F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = -yx\,\mathrm{sen}\, z - ye^x + g'(z)$$

y concluimos que g debe ser una constante que tomamos, por ejemplo, como cero. Un potencial es

$$f(x, y, z) = yx\cos z - yze^x.$$

738 *Probar que cualquier campo vectorial $F(x, y) = (P(x), Q(y))$, con P y Q funciones derivables definidas en todo $\mathbb{R}$, posee un potencial escalar.*

739 *Probar que todo campo vectorial $F(x, y) = (f(x + y), f(x + y))$, donde f es una función derivable de una variable definida en todo $\mathbb{R}$, posee un potencial escalar.*

740 *Encontrar una función $Q(x,y)$ tal que el campo*

$$F(x,y) = (\sqrt{x}y^3, Q(x,y))$$

sea conservativo.

Solución 740:

La condición para que el campo

$$F(x,y) = \left(\sqrt{x}y^3, Q(x,y)\right)$$

sea conservativo es que se verifique la igualdad de las derivadas parciales

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2\sqrt{x}.$$

Por lo tanto, basta tomar

$$Q(x,y) = 2y^2x^{3/2} + g(y),$$

para cualquier función g de la variable y.

741 (a) *Dado el campo vectorial*

$$F(x,y) = \left(e^y\frac{1+e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}, \frac{xe^y}{1+e^x}\right),$$

probar que es un gradiente y encontrar un potencial para dicho campo.

(b) *Consideremos ahora la curva C con parametrización*

$$\alpha(t) = (t, 1-t^2), \quad t \in [0,1],$$

y el campo

$$G(x,y) = \left(e^y\frac{1+e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}, x\frac{1+e^x+e^y}{1+e^x}\right).$$

Usando el apartado anterior, encontrar el valor de la integral $\int_C G \cdot d\sigma$.

Solución 741:

(a) Comprobar que el campo dado F es un gradiente es sencillo pues un cálculo directo da

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^y \frac{1 + e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}.$$

Encontrar un potencial para dicho campo es también un ejercicio sencillo de integración. Integrando con respecto a y en la igualdad

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \frac{x}{1+e^x},$$

obtenemos

$$f(x,y) = e^y \frac{x}{1+e^x} + g(x).$$

Derivando respecto a x e igualando a la primera componente de F, vemos inmediatamente que podemos tomar $g(x) = 0$. Por tanto un potencial para F es

$$f(x,y) = e^y \frac{x}{1+e^x}.$$

(b) Para calcular la integral de línea de un campo vectorial complicado, como es el caso, es conveniente primero averiguar si se trata de un campo gradiente, pues entonces el cálculo de la integral se reduce a evaluar un potencial vectorial en los extremos de la curva. Un simple cálculo muestra que el campo G no es gradiente. No obstante, antes de atacar el cálculo directo de la integral, usando la parametrización de la curva que nos dan, resulta interesante tratar de relacionar este campo con otro que sí sabemos que es gradiente. Remitiéndonos al apartado anterior, observamos que el campo G se puede descomponer como

$$G(x,y) = F(x,y) + (0,x),$$

donde F, del apartado anterior, sí es un campo gradiente. En consecuencia, la linealidad de la integral proporciona

$$\int_C G = \int_C F + \int_C (0,x).$$

Ahora bien, la integral de F sobre C puede evaluarse de manera muy cómoda mediante el potencial que se ha calculado antes. Así

$$\int_C F = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1,0) - f(0,1) = \frac{1}{1+e}.$$

Por otro lado

$$\int_C (0,x) = \int_0^1 t(-2t)\,dt = -\frac{2}{3}.$$

Finalmente

$$\int_C G = \frac{1}{1+e} - \frac{2}{3}.$$

Comprobar que los siguientes campos son gradientes y usarlos para calcular las integrales pedidas:

742 $\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$, *donde* $C \equiv (5t^3, -t^3)$, $t \in [-1,1]$.

743 $\int_C 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$, *con* $C \equiv (3t^2+1, 2t)$, $t \in [0,1]$.

744 *Sea* C *la curva de parametrización* $\sigma(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{-t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^6}\right)$, *con* $t \in [0,1]$. *Calcular la integral*

$$I = \int_C y^2z^3\,dx + (2xyz^3 + z^2)\,dy + (3xy^2z^2 + 2yz + 1)\,dz.$$

Solución 744:

Se trata de calcular la integral del campo

$$F = (y^2z^3, 2xyz^3 + z^2, 3xy^2z^2 + 2yz + 1)$$

sobre la curva que se da. Los cálculos pueden resultar tediosos o incluso imposibles de realizar, a menos que el campo F resulte ser gradiente en cuyo caso, con un potencial, la integral se calcula inmediatamente. Si calculamos el rotacional de F encontramos que,

efectivamente, se trata de un campo gradiente. Además, siguiendo con cuidado los pasos para determinar un potencial, encontramos que la función

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + yz^2 + z$$

es un potencial escalar de F. Así pues

$$I = \int_C F = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - f(0, 0, 0) = \frac{25}{64}.$$

745 *Calcular* $\int_C \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$*, donde* C *es la curva dada por* $y = x^2$*,* $z = x^4$ *entre los puntos* $(0, 0, 0)$ *y* $(1, 1, 1)$*.*

Solución 745:

Si ponemos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y para una función escalar f,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz,$$

resulta que

$$d(1 + r^2) = 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

y en consecuencia la integral que nos interesa se puede interpretar formalmente como

$$\int_C \frac{1}{2}\frac{d(1 + r^2)}{1 + r^2} = \frac{1}{2}\log(1 + r^2)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} = \log(2).$$

En realidad, los cálculos anteriores significan que la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\log(1 + x^2 + y^2 + z^2)$$

es un potencial del campo que teníamos que integrar.

746 *Calcular la integral de línea del campo* $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dado por*

$$F(x, y, z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right),$$

a lo largo de la curva definida por:

$$\sigma(t) = \left(\log(t^2 - t + 1), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(t^3 + 3t^2 - 3t)\right), \frac{\cos(t^5 - t) - 1}{(t^2 + t + 1)^{4/7}}\right),$$

para $t \in [0, 1]$.

Solución 746:

Una simple comprobación muestra que el campo F es gradiente, pues está definido en todo el espacio y satisface $\nabla \times F = 0$. Buscamos pues, un potencial escalar, es decir, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & e^{xz}(xyz^2 + yz) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & xze^{xz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & e^{xz}(x^2yz + xy) \end{array}\right\}$$

entonces

$$f(x, y, z) = \int xze^{xz}\,dy = xyze^{xz} + \varphi(x, z).$$

Para determinar φ usamos las otras dos ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xz}(xyz^2 + yz) = e^{xz}(yz + xyz^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi(x, z) \equiv \varphi(z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xz}(x^2yz + xy) = e^{xz}(xy + x^2yz) + \varphi'(z) \Rightarrow \varphi(z) = \text{cte}.$$

Luego una función potencial es $f(x, y, z) = xyze^{xz}$. Finalmente, como $\sigma(0) = (0, 0, 0)$, $\sigma(1) = (0, 1, 0)$, $\int_C F \cdot d\sigma = f(0, 1, 0) - f(0, 0, 0) = 0$.

747 *Obtener el valor de la siguiente integral de línea:*

$$\int_C \frac{x}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dx + \left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2 + z^2} + 2y\right) dy + \left(\frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) dz,$$

donde C *es el trozo de curva dada por las ecuaciones* $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = y$, $x \geq 0$, *desde el origen al punto* $(0, 1, 1)$.

Solución 747:

Es inmediato comprobar que el campo vectorial

$$F(x,y,z)=\left(\tfrac{x}{1+x^2+y^2+z^2},\tfrac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+2y,\tfrac{z}{1+x^2+y^2+z^2}+\tfrac{1}{z^2+1}\right),$$

es gradiente, pues está definido en todo $\mathbb{R}^3$ y satisface $\nabla\times F=0$. Buscamos pues, un potencial escalar, resolviendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}+2y\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{aligned}$$

Es fácil obtener

$$f(x,y,z)=\log\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}+y^2+\arctan z.$$

Finalmente,

$$\int_C F\cdot d\sigma=f(0,1,1)-f(0,0,0)=\log\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{4}.$$

748 *Sea $F(x,y,z)=(z^3+2xy,x^2,3xz^2)$. Comprobar que la integral de F a lo largo del disco unidad en el plano XY es cero:*

(a) *Directamente.*

(b) *Probando que F es el gradiente de alguna función f que habrá que determinar.*

749 *Sea $F=(yz,xz+y,xy+1)$ un campo vectorial. Definimos la función $f(x,y,z)=\int_C F$ donde C es el segmento que une el punto $(0,0,0)$ con (x,y,z). Determinar f evaluando la integral de línea que la define y luego probar que $\nabla f=F$.*

Solución 749:

El segmento de recta que une $(0,0,0)$ con un punto genérico (x,y,z) es

$$\sigma(t)=t(x,y,z),\quad t\in[0,1].$$

El producto escalar que debemos integrar entre 0 y 1 es

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \left(t^2yz, t^2xz + ty, t^2xy + 1\right) \cdot (x, y, z)$$
$$= 3t^2xyz + ty^2 + z.$$

Así pues

$$f(x, y, z) = \int_C F = \int_0^1 (3t^2xyz + ty^2 + z)\, dt = xyz + \frac{y^2}{2} + z.$$

Si ahora calculamos el gradiente de esta función f, comprobamos que en efecto

$$\nabla f = F,$$

luego f es un potencial para F y por tanto este campo es gradiente.

750 *Dado el campo vectorial* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = (2x^3 + x - y^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2 - 2xy)$$

y la curva dada por la parametrización

$$\sigma(t) = (t \operatorname{sen}(\pi t^2), t \cos(\pi t^2)),$$

para $t \in [0, 1]$, *calcular la integral* $\int_\sigma F \cdot d\sigma$.

Solución 750:

Observamos que el campo F está definido en todo $\mathbb{R}^2$ y que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y - 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, luego es un campo conservativo. Calculando una función potencial para dicho campo se obtiene

$$f(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - xy^2 - x^2y + \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Para hacer la integral usamos esta función de forma que

$$\int_\sigma F = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = 1.$$

Sección 4.4

Superficies

751 *Encontrar una expresión para el vector normal a la superficie de parametrización:*

$$x = (2 - \cos v)\cos u,\ y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u,\ z = \operatorname{sen} v,$$
$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi.$$

¿Es suave esta superficie? Intentar esbozarla.

Encontrar la ecuación del plano tangente a las superficies siguientes en los puntos dados:

752 $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$, *para* $u = v = 1$.

753 $x = u^2$, $y = u\operatorname{sen}(e^v)$, $z = \frac{1}{3}u\cos(e^v)$, *en* $(13, -2, 1)$.

754 $z = 3x^2 + 8xy$, *para* $x = 1$, $y = 0$.

755 $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, *en* $(1, \frac{1}{3}, 0)$.

Solución:

753 Cuando disponemos de una parametrización de la superficie

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

la ecuación del plano tangente en un punto concreto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$$

viene dada por la expresión

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

donde los vectores de derivadas parciales se evalúan para los valores (u_0, v_0). En nuestro caso los valores de los parámetros que nos dan el punto $(13, -2, 1)$ son

$$u_0 = \sqrt{13}, \quad v_0 = \log\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{-2}{\sqrt{13}}\right),$$

y los vectores de derivadas parciales en dichos valores de los parámetros son

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (\tfrac{2}{\sqrt{13}}, -\tfrac{2}{\sqrt{13}}, \tfrac{1}{\sqrt{13}}),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(0, 3\operatorname{arc\,sen}(-\tfrac{2}{\sqrt{13}}), (\tfrac{2}{3})\operatorname{arc\,sen}(-\tfrac{2}{\sqrt{13}})\right).$$

La ecuación del plano tangente será por tanto

$$\det\begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 3\operatorname{arc\,sen}(-\frac{2}{\sqrt{13}}) & \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sen}(-\frac{2}{\sqrt{13}}) \\ x-13 & y+2 & z-1 \end{pmatrix} = 0$$

que da lugar a $-x - 4y + 18z = 13$.

755 Si la superficie está determinada a través de una ecuación del tipo $f(x, y, z) = 0$ la ecuación del plano tangente en un punto de la misma (x_0, y_0, z_0) (que debe por tanto verificar $f(x_0, y_0, z_0) = 0$) viene dada por la expresión

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

En el ejemplo que nos ocupa será

$$(4, 3, 0) \cdot (x - 1, y - \frac{1}{3}, z) = 0,$$

es decir

$$4x + 3y = 5.$$

756 *Calcular el área de la superficie dada por la parametrización*

$$x = r\cos\theta,\ y = 2r\cos\theta,\ z = \theta, \quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

y esbozarla.

757 *Encontrar el área de la esfera unitaria usando la parametrización*

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi,\ y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi,\ z = \cos\phi,$$
$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi.$$

758 *Si* $\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$ *para* $(u,v) \in D = \{u^2+v^2 \le 1\}$, *encontrar el área de* $\Phi(D)$ *e intentar esbozar esta superficie.*

Solución 758:

La fórmula para encontrar el área de una superficie parametrizada

$$\Phi(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

es

$$A = \int_D |\Phi_u \times \Phi_v|\, dx.$$

En este caso concreto tendremos

$$\Phi_u = (1,1,v), \quad \Phi_v = (-1,1,u),$$
$$\Phi_u \times \Phi_v = (u-v, -u-v, 2), \quad |\Phi_u \times \Phi_v| = \sqrt{4+2u^2+2v^2},$$

y en consecuencia

$$A = \int_{\{u^2+v^2\le 1\}} \sqrt{4+2u^2+2v^2}\, du\, dv.$$

Por el integrando y por la región de integración, el cambio a coordenadas polares permite encontrar esta integral de modo fácil. En efecto

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4+2r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}(6\sqrt{6}-8).$$

Dicha superficie está esbozada en la Figura 50 y corresponde a un paraboloide hiperbólico de ecuación $4z = y^2 - x^2$ sobre $\{x^2+y^2 \le 2\}$, sin más que tener en cuenta que $x = u - v$, $y = u + v$, por lo que $z = uv = \frac{1}{4}(y^2 - x^2)$.

759 *Encontrar el área del toro cuya parametrización es*

$$\Phi(\varphi,\psi) = ((R+\cos\psi)\cos\varphi, (R+\cos\psi)\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\psi),$$

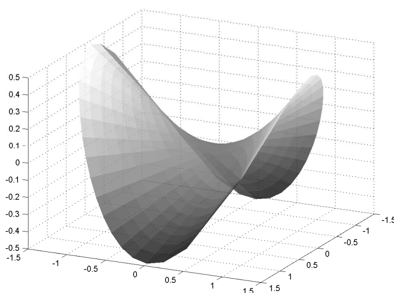


Figura 50. Gráfica del Ejercicio **758**

para $\psi, \varphi \in [0, 2\pi]$, *con* $R \geq 1$.

Solución 759:

Por la fórmula del área de una superficie parametrizada encontramos en el caso del toro, después de algunos cálculos cuidadosos,

$$\Phi_\varphi = (-(R + \cos\psi)\operatorname{sen}\varphi, (R + \cos\psi)\cos\varphi, 0)\,,$$
$$\Phi_\psi = (-\cos\varphi \operatorname{sen}\psi, -\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\varphi, \cos\psi)\,,$$
$$\Phi_\varphi \times \Phi_\psi = (R + \cos\psi)(\cos\varphi\cos\psi, \operatorname{sen}\varphi\cos\psi, \operatorname{sen}\psi)\,,$$
$$|\Phi_\varphi \times \Phi_\psi| = R + \cos\psi,$$
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + \cos\psi)\, d\psi\, d\varphi = 4\pi^2 R.$$

Encontrar una parametrización para las siguientes superficies:

760 *Porción del hiperboloide* $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, *que se encuentra bajo el rectángulo* $[-1, 1] \times [-3, 3]$.

761 *Porción de* $z = x + 3$ *que se encuentra dentro de* $x^2 + y^2 = 1$.

762 *Porción de* $x^2 + z^2 + 2z = 0$ *comprendida entre* $y = -1$ *e* $y = 3$.

763 *Superficie de* $4 - z = x^2 + y^2$ *limitada por* $y + z = 4$.

764 *Porción de superficie $y = 4x + z^2$ comprendida entre $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.*

765 *Mitad superior del elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.*

766 *Porción de $y = 3 - 3x^2 - 2z^2$ situado a la derecha del plano XZ.*

767 *Porción de $x + y^2 + 2z^2 = 4$ situado frente al plano $x = 0$.*

768 *De la esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio a comprendida en una hoja del cono $x^2 + y^2 = z^2$.*

Solución:

762 La ecuación $x^2 + z^2 + 2z = 1$ reorganizada completando cuadrados se convierte en $x^2 + (z + 1)^2 = 1$. En esta forma vemos que se trata de un círculo en el plano XZ con centro en $(0, -1)$ y radio 1. Como la variable y no interviene en esta ecuación, trasladamos este círculo paralelamente al eje Y y obtenemos así un cilindro entre los planos $y = -1$ e $y = 3$. La parametrización más natural será por tanto

$$x(u, v) = \cos u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = -1 + \operatorname{sen} u,$$
$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 3].$$

763 La superficie de ecuación $4 - z = x^2 + y^2$ es un paraboloide invertido mientras que $y + z = 4$ es un plano (ver Figura 51). La superficie que nos piden parametrizar es la parte del citado paraboloide por encima del plano. Veamos cuál es la intersección de ambas superficies. Eliminando z de las dos ecuaciones, obtendremos la proyección de dicha intersección sobre el plano XY. Así se llega a la ecuación

$$y + (4 - x^2 - y^2) = 4.$$

Después de cancelar, agrupar y completar cuadrados, obtenemos

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

El modo más fácil de parametrizar la superficie es interpretarla como el grafo de $z = 4-x^2-y^2$ sobre el círculo anterior. De este modo ponemos

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = (\tfrac{1}{2} + v\,\mathrm{sen}\,u),$$
$$z(u,v) = \tfrac{15}{4} - v^2 - v\,\mathrm{sen}\,u, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1/2].$$

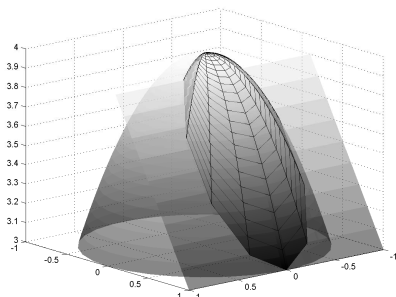


Figura 51. Ejercicio **763**: paraboloide limitado por plano

766 En primer lugar encontramos el corte de la superficie de ecuación $y = 3 - 3x^2 - 2z^2$ con el plano XZ que tiene ecuación $y = 0$. Tal intersección es la elipse

$$x^2 + \frac{2}{3}z^2 = 1.$$

La parte de la superficie que queda a la derecha del plano XZ corresponde al interior de dicha elipse. En consecuencia podemos parametrizar la superficie que nos solicitan considerándola como la parte del grafo de $y = 3-3x^2-2z^2$ "sobre" el interior de la elipse anterior. Es decir

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = 3(1-v^2),$$
$$z(u,v) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}v\,\mathrm{sen}\,u, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1].$$

768 La ecuación de la esfera es $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$. De esta suerte, el corte con el cono $z^2 = x^2 + y^2$ proyectado sobre el

plano XY tendrá ecuación, después de eliminar la variable z y completar cuadrados,

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

que es el círculo de radio $\frac{a}{2}$ centrado en el punto $(\frac{a}{2}, 0)$. La superficie que nos piden podríamos parametrizarla mediante la parte del grafo de

$$z = \sqrt{a^2 - (x-a)^2 - y^2}$$

sobre el interior de la circunferencia anterior, resultando

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2ar\cos\theta - r^2}),$$
$$\theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad r \in [0, a\cos\theta];$$

Pero es quizás más cómodo usar las coordenadas esféricas del siguiente modo. Puesto que se trata de una porción de la esfera inicial, sabemos que la parametrización será

$$x(u, v) = a + a\cos u \operatorname{sen} v, \quad y(u, v) = a\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z(u, v) = a\cos v.$$

Lo importante en este caso es determinar la región en la que deben moverse los parámetros (u, v) para que las coordenadas esféricas sólo nos describan la parte de la esfera determinada por el corte del cono $z^2 = x^2 + y^2$. En primer lugar observamos que el ángulo u debe barrer el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Pero el ángulo v debe barrer un intervalo que depende del valor de u considerado. Examinando la Figura 52 con cuidado llegamos a la conclusión de que v varía entre 0 y el ángulo producido en la intersección del cono con la esfera. Si parametrizamos la curva intersección en función de u, observamos que su proyección es $(-a\cos^2 u, -a\cos u \operatorname{sen} u)$ y por tanto la curva corresponde a

$$(-a\cos^2 u, -a\cos u \operatorname{sen} u, a|\cos u|).$$

De este modo es fácil encontrar que si $u \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ entonces $v \in [0, u - \frac{\pi}{2}]$, mientras que si $u \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $v \in [0, \frac{3\pi}{2} - u]$. De

forma más compacta podemos poner

$$\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{3\pi}{2} \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} - |u - \pi|.$$

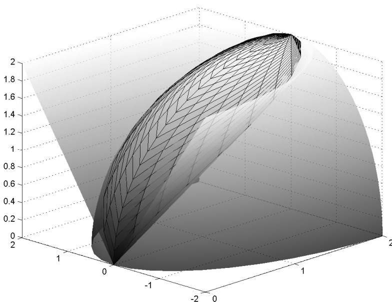


Figura 52. Gráfica del Ejercicio **768** para $a = 2$

769 *Se considera la figura en el plano XZ formada por la curva $z = 1 - |x|$ y el arco de parábola $z = \frac{1-x^2}{2}$. Sea S la superficie cerrada engendrada al girar dicha figura alrededor del eje Z. Encontrar una parametrización para dicha superficie justificando la respuesta.*

Solución 769:

Puesto que se trata de una superficie de revolución podemos usar la parametrización genérica para este tipo de superficies. Sabemos que para una curva en el plano XZ de la forma $(f(u), g(u))$, la parametrización de la superficie de revolución alrededor del eje Z es

$$\Phi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v, g(u)).$$

Atendiendo a la gráfica (ver Figura 53(a)) es claro que sólo es necesario revolucionar la parte correspondiente a $x \geq 0$. La curva será $(t, 1 - t)$, con $t \in [0, 1]$ y $(t, \frac{1-t^2}{2})$, con $t \in [0, 1]$, luego la parametrización vendrá en dos partes:

$$\Phi_1(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, (1 - u)), \quad u \in [0, 1], \ v \in [0, 2\pi]$$

$$\Phi_2(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, \frac{1 - u^2}{2}), \quad u \in [0, 1], \ v \in [0, 2\pi]$$

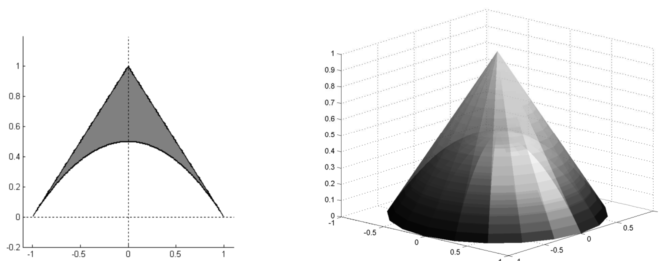


Figura 53. Ejercicio **769**

770 *Encontrar el área de la superficie de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *encerrada por el cilindro* $x^2 + y^2 = x$*. Esbozar la figura. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).*

Hallar el área de las superficies siguientes:

771 *Porción de* $z = x + y^2$ *que se encuentra encima del triángulo de vértices* $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ *y* $(0, 1, 0)$.

772 *Porción de* $x + 2y + z = 4$ *en el interior de* $x^2 + y^2 = 4$.

773 *Porción de* $z = x^2 - y^2$ *entre* $x^2 + y^2 = 1$ *y* $x^2 + y^2 = 4$.

774 *De la superficie* $x^2+y^2-4z^2 = 0$ *limitada por* $x^2+y^2-4x = 0$.

775 *Superficie del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *limitada por* $0 \leq y \leq z \leq 2y$.

776 *Del cilindro* $x^2 + y^2 = 2x$ *limitado por* $z = 0$ *y* $x^2 + y^2 = z^2$.

777 *De la superficie cilíndrica* $x^2 + y^2 = ay$ *limitada por la esfera de centro* $(0, 0, 0)$ *y radio* $a > 0$.

778 *Del elipsoide* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$.

779 *De la porción de esfera* $x^2+y^2+z^2 = 2z$ *situada en el interior del cono* $x^2 + y^2 = z^2$.

780 *Porción de* $x = y^2 + z^2$ *en el interior de* $y^2 + z^2 = 9$.

Solución:

771 Podemos describir la superficie que nos dan como una parte del grafo de la función $z = x + y^2$. De esta manera, el área que nos piden vendrá dada por la integral doble

$$A = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx,$$

donde D es la región en la que se mueven las variables (x, y). Nótese que esta fórmula corresponde al área de la superficie parametrizada por $(x, y, z(x, y))$. En nuestro caso concreto tenemos que D es el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Las variables (x, y) describen este triángulo si

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Así el área será

$$A = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2 + 4y^2}\, dx\, dy = \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}.$$

La integral queda mucho más complicada si en el momento de describir el triángulo se usa el otro orden de integración.

774 Usamos las coordenadas cilíndricas centradas en el origen, de modo que

$$x(u, v) = v \cos u, \quad y(u, v) = v \operatorname{sen} u, \quad z(u, v) = v/2,$$

donde hemos tenido en cuenta que $z^2 = (x^2 + y^2)/4$ es $z = \frac{v}{2}$ en coordenadas cilíndricas. Lo importante ahora es determinar apropiadamente la región en la que se deben mover los parámetros (u, v). Está región viene determinada por el interior de la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$. En coordenadas cilíndricas, esta curva es $v = 4 \cos u$. Como se trata de un círculo, concluimos que los parámetros se deben mover en la región

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{/}2, \quad 0 \leq v \leq 4 \cos u.$$

Necesitamos además la norma

$$|(x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)| = \frac{\sqrt{5}v}{2}.$$

Finalmente, el área viene dada por la integral

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos u} \frac{\sqrt{5}v}{2}\, dv\, du.$$

Después de unos cuantos cálculos obtenemos el valor de dicha integral $2\sqrt{5}\pi$.

777 Para la descripción de la porción de cilindro que se nos pide (ver Figura 54), está claro que la proyección de la figura sobre el plano XY corresponde a la circunferencia que genera el cilindro cuya ecuación en polares es $r = a \operatorname{sen}\theta$. De este modo llegamos a la parametrización

$$\Phi(z,\theta) = (a \operatorname{sen}\theta \cos\theta, a \operatorname{sen}^2\theta, z),\ \theta \in [0,\pi],\ z \in [0, a|\cos\theta|]$$

donde debido a la simetría sólo hemos incorporado la parte de la superficie para $z \geq 0$. La longitud del vector normal

$$\mathbf{n}(z,\theta) = (a \operatorname{sen}(2\theta), -a\cos(2\theta), 0),$$

que es el integrando para calcular el área, es a. Por tanto

$$A = 2\int_0^{\pi} \int_0^{a|\cos\theta|} a\, dz\, d\theta = 4a^2.$$

780 Como el área de una superficie es independiente del nombre de las variables que usemos para describirla, podemos intercambiar los papeles de las variables x y z y así encontrar el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$. Las coordenadas cilíndricas son las más idóneas para parametrizar esta situación. En efecto

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = v \operatorname{sen} u, \quad z(u,v) = v^2,$$
$$0 \leq v \leq 3, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Así, después de unos cálculos sencillos, llegamos a que

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{3} v\sqrt{1+4v^2}\, dv\, du = \frac{\pi}{6}\left(37^{3/2} - 1\right).$$

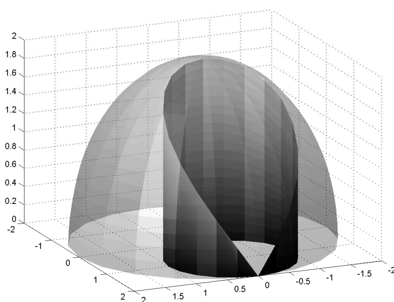


Figura 54. Superficie del Ejercicio **777**

Sección 4.5

Integrales de superficie

781 *Evaluar la integral* $\int_S xy\,dS$, *donde* S *es la superficie del tetraedro con lados* $z=0$, $y=0$, $z+x=1$ *y* $x=y$.

782 *Calcular* $\int_S z\,dS$ *siendo* S *la superficie dada por*

$$\left\{(x,y,z) : z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}, \text{ con } a>0.$$

Solución 782:

Si la superficie S admite una parametrización

$$\Phi(u,v), \quad (u,v)\in D,$$

entonces la integral de superficie de una función escalar f será

$$\int_S f\,dS = \int_D f(\Phi(u,v))\,|\Phi_u\times\Phi_v|\,du\,dv.$$

En este ejemplo concreto podemos tomar como parámetros (u,v), las mismas variables (x,y), de suerte que D es el círculo centrado

en el origen de radio a. Los vectores Φ_u y Φ_v coinciden con los vectores

$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

y la integral queda

$$\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Después de realizar estas operaciones con un poco de cuidado, resulta que la integral es

$$\int_D a\, dx\, dy = a\pi a^2 = \pi a^3.$$

783 *Calcular* $\int_S z^2\, dS$ *donde* S *es la frontera del cubo* $[-1, 1]^3$.

Calcular las siguientes integrales de superficie:

784 $\int_S y\, dS$, *donde* S *es la porción del plano* $3x + 2y + z = 6$ *comprendida en el primer octante.*

785 $\int_S xz\, dS$, *con* S *es el triángulo de vértices* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$.

786 $\int_S x\, dS$, *para* S *definida por* $y = x^2 + 4z$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$.

787 $\int_S yz\, dS$, *donde* S *es la porción de* $z = y + 3$ *interior a* $x^2 + y^2 = 1$.

788 $\int_S (y^2 + z^2)\, dS$, S *la porción de* $x = 4 - y^2 - z^2$ *situada al frente de* $x = 0$.

789 $\int_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$, *donde* S *es el cilindro* $x^2 + y^2 = 9$ *comprendido entre los planos* $z = 0$ *y* $z = 2$, *incluidas sus tapas.*

Solución:

784 Si representamos la parte del plano $3x + 2y + z = 6$ en el primer octante (véase la Figura 55) nos damos cuenta de que se trata de un triángulo. Como además la función que tenemos que integrar sobre este triángulo es y, podemos tomar como parámetros las otras dos variables (x, z) y tomar $y = (6 - z - 3x)/2$. La proyección del triángulo anterior sobre el plano XZ nos dará la región en la que se mueven los parámetros (x, z). Esta proyección es también un triángulo determinado por las tres rectas $x = 0$, $z = 0$ y $3x + z = 6$ (poniendo $y = 0$ en la ecuación del plano). En definitiva,

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 6 - 3x.$$

La integral que nos solicitan se escribe por tanto

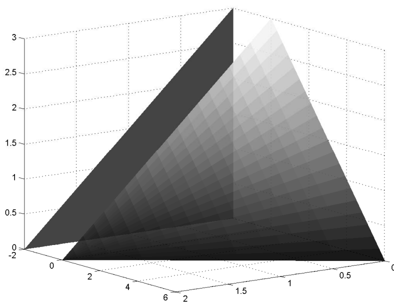


Figura 55. Representación gráfica del Ejercicio **784**

$$I = \int_0^2 \int_0^{6-3x} \frac{6 - z - 3x}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\, dz\, dx.$$

Los cálculos, que son sencillos en este caso, nos llevan a

$$I = 3\sqrt{14}.$$

787 La superficie S en la que debemos integrar es la porción del plano $z = y + 3$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. En consecuencia, la elección más sencilla de parámetros corresponde

a (x, y) que se deben mover en el círculo unitario del plano C. La superficie se considera así como una parte del grafo $z = y + 3$. Por tanto

$$I = \int_C y(y+3)\sqrt{1+1}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_C (y^2+3y)\,dx\,dy.$$

Si ahora cambiamos a coordenadas polares, tendremos

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 3r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta.$$

Todas las integraciones involucradas son más o menos inmediatas, teniendo en cuenta las ideas de capítulos anteriores, llegando al resultado final

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Nótese que se podrían haber elegido desde el principio como parámetros para describir la superficie S, las coordenadas polares.

789 La superficie S es el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ comprendido entre $z = 0$ y $z = 2$, incluyendo las dos tapas $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$, y $z = 2$, $x^2 + y^2 \leq 9$. Dicha superficie consta por tanto de tres partes, las dos tapas y la superficie lateral, y debemos calcular tres contribuciones a la integral para después sumarlas.

En primer lugar, cuando $z = 0$, una parametrización válida es

$$\Phi(x, y) = (x, y, 0), \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 9\},$$

con vector normal de longitud uno. Así tendremos

$$I_1 = \int_{\{x^2+y^2\leq 9\}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Mediante las coordenadas polares encontramos inmediatamente

$$I_1 = \frac{81}{2}\pi.$$

Para la tapa superior, la parametrización puede ser $(x, y, 2)$ con $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, y análogamente

$$I_2 = \int_{\{x^2+y^2 \leq 9\}} (x^2 + y^2 + 4).$$

Igual que antes encontramos

$$I_2 = \frac{153}{2}\pi.$$

Finalmente para la superficie lateral usamos como parámetros para describirla el ángulo θ y la altura z. Así tendremos

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z.$$

En este caso la longitud del vector normal es tres. La integral queda

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3(9 + z^2)\,dz\,d\theta.$$

Los cálculos conducen a

$$I_3 = 124\pi.$$

Por último la respuesta final será $I = I_1 + I_2 + I_3 = 241\pi$.

790 *Si* $F(x, y, z) = (x, x^2, yz)$ *y* $S = \{z = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, *calcular* $\int_S F$.

791 *Sea* S *el elipsoide de ecuación* $2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ *y* $F(x, y, z) = (x, y, z)$. *Calcular la integral* $I = \int_S F$.

Solución 791:

Para parametrizar el elipsoide usamos coordenadas esféricas dilatadas y desplazadas, que en este caso resultan

$$x(u, v) = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,\mathrm{sen}\,v, \quad y(u, v) = -1 + \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v,$$
$$z(u, v) = \cos v \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi].$$

Este cambio proporciona el vector normal exterior

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} v(\sqrt{2}\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v);$$

y la integral resulta

$$\int_S F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} v(1 + \sqrt{2}\cos u \operatorname{sen} v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)\, dv\, du$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}.$$

Calcular el flujo del campo F a través de la superficie S. Cuando la superficie sea cerrada utilizar la orientación exterior:

792 $F = (e^x, e^y, z)$, $S \equiv$ *porción de* $z = xy$ *sobre el triángulo* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ *con orientación hacia arriba.*

793 $F = (e^y, ye^x, x^y)$, $S \equiv$ *porción de* $z = x^2 + y^2$ *por encima de* $0 \le x \le 1$ *con* $0 \le y \le 1$, *orientada hacia fuera.*

794 $F = (x^2y, -3xy^2, 4y^3)$, $S \equiv$ *porción de* $z = x^2 + y^2 - 9$ *bajo* $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, *con orientación hacia dentro.*

795 $F = (-x, -y, z^2)$, $S \equiv$ *porción de* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *comprendida entre* $z = 1$ *y* $z = 2$, *orientada hacia fuera.*

796 $F = (x, y, z)$, $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

797 $F = (0, y, -z)$, $S \equiv y = x^2 + z^2$ *para* $0 \le y \le 1$, *junto con* $x^2 + z^2 \le 1$, $y = 1$.

798 $F = (x, 2y, 3z)$, $S \equiv$ *cubo* $[-1,1]^3$.

Solución:

792 Como la integral de superficie de un campo exige integrar el producto escalar

$$F(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v),$$

observamos que esta expresión es el producto mixto de los tres vectores $F(\Phi)$, Φ_u y Φ_v. Sabemos que este producto

mixto es el determinante con filas formadas por estos tres vectores. Así podemos escribir

$$\int_S F = \int_D \det(F(\Phi(u,v), \Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v))\, du\, dv,$$

si D es la región en la que se mueven los parámetros (u,v). En el caso concreto que nos ocupa, podemos usar como parámetros las propias variables (x,y). De este modo debemos integrar sobre el triángulo determinado por los tres puntos dados el determinante

$$\begin{vmatrix} e^x & e^y & xy \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = xy - ye^x - xe^y.$$

En concreto, la integral que nos interesa es

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} (xy - ye^x - xe^y)\, dy\, dx = -2e^{-1}.$$

795 Usamos las coordenadas polares como parámetros. De este modo ponemos

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = r, \qquad 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Los vectores tangentes son

$$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \qquad (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0).$$

Si hacemos el producto vectorial en este sentido obtenemos el vector normal hacia dentro. Como nos piden usar la orientación contraria, debemos invertir el orden de los dos vectores anteriores. Así debemos integrar en el rango en el que se mueven los parámetros el determinante

$$\begin{vmatrix} -r\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & r^2 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} = -r^2 - r^3.$$

Así se obtiene el valor de la integral como

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 (-r^2 - r^3)\, dr\, d\theta = -2\pi \left(\frac{7}{3} + \frac{15}{4} \right).$$

798 Como el cubo $[-1,1]^3$ consta de seis caras, debemos calcular la integral del campo F sobre cada una de estas caras y sumar al final los resultados.

En primer lugar consideremos la cara $x = 1$. La normal exterior al cubo es $(1,0,0)$ y el producto escalar con $F = (x, 2y, 3z)$ es x, que en la cara $x = 1$ vale precisamente 1. Por lo tanto, esta primera contribución a la integral es la superficie de la cara que es 4. El mismo razonamiento sobre la cara $x = -1$ lleva a que la contribución sobre esta cara vuelve a ser 4.

Razonando de modo similar en el resto de las caras, llegamos a que las contribuciones sobre las caras $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$ son, respectivamente, 8, 8, 12, 12. La integral total será 48.

799 *El campo de velocidad de un fluido se describe por $F = (1, x, z)$ (expresado en metros/segundo). ¿Cuántos metros cúbicos de fluido cruzan por segundo la superficie $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$? (Indicación: se está pidiendo $\int_S F$).*

800 *Dado el campo eléctrico $E(x,y,z) = (x,y,0)$ y la superficie S definida por el cono $x^2 + z^2 = y^2$ con $z > 0$ y acotada por los planos $y = 0$ e $y = 1$, encontrar el flujo de E a través de S con orientación hacia arriba.*

Solución 800:

Si usamos las coordenadas polares

$$x = r\cos\theta,\quad y = r, z = r\operatorname{sen}\theta,\qquad 0 \leq r \leq 1,\quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

los vectores tangente ordenados para que proporcionen la orientación hacia arriba son

$$(\cos\theta, 1, \operatorname{sen}\theta)\,,\qquad (-r\operatorname{sen}\theta, 0, r\cos\theta)\,.$$

De este modo debemos integrar el determinante

$$\begin{vmatrix} r\cos\theta & r & 0 \\ \cos\theta & 1 & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = -r^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

La integral es

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 -r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, dr \, d\theta = -\frac{\pi}{6}.$$

801 *Dada c una constante y D una región cualquiera del plano XY, probar que si $S = \{z = c : (x, y) \in D\}$ entonces*

$$\int_S (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \, dS = \int_D R(x,y,c) \, dA.$$

802 *Encontrar el centro de gravedad de la superficie*

$$S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\right\}, \qquad R > 0$$

803 *Utiliza la Ley de Gauss para determinar la carga eléctrica contenida en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, si el campo eléctrico es $E(x, y, z) = (x, y, 2z)$.*

Solución 803:

La ley de Gauss afirma que la carga eléctrica contenida en la región limitada por una superficie cerrada es el flujo del campo eléctrico creado a través de dicha superficie. En este ejemplo la superficie cerrada consta de dos partes: el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ y el plano del ecuador $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$.

En el primer caso, la normal unitaria es $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$ de modo que debemos integrar el producto escalar

$$(x, y, 2z) \cdot (\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}) = \frac{1}{a}\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right),$$

sobre la superficie determinada por $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$. Mediante las coordenadas polares, los cálculos conducen al valor

$$\frac{8}{3}\pi a^3.$$

Sobre el ecuador, tenemos como normal exterior $(-1,0,0)$, luego debemos integral el producto de F con este vector, que es $-x$. Es inmediato comprobar que esta integración da un resultado nulo.

Finalmente la carga total será

$$\frac{8}{3}\pi a^3.$$

804 *La temperatura en el punto (x,y,z) de una sustancia de conductividad $k = 6{,}5$ es $T(x,y,z) = 2y^2 + 2z^2$. Encontrar la razón de flujo de calor hacia el interior a través de la superficie $y^2+z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$.*

Solución 804:

Debemos encontrar la integral de $F = k\nabla T = 6{,}5(0,4y,4z)$ sobre la frontera del cilindro $y^2+z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$. Sobre las dos tapas de dicho cilindro, las normales son $(\pm 1,0,0)$ y su producto escalar con F es por tanto nulo. La contribución al flujo de calor por las tapas es por tanto nula. Sobre la superficie lateral el vector normal unitario es

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(0,y,z),$$

y el producto escalar con F es

$$\frac{6{,}5}{\sqrt{6}}4(y^2+z^2) = \frac{156}{\sqrt{6}}$$

debido a que sobre el cilindro, y^2+z^2 vale 6. La integral sobre la superficie lateral del cilindro será la constante anterior por el área lateral, siendo el valor final 1248π.

CAPÍTULO 5

Análisis vectorial

Tras ejercitarnos en el cálculo de integrales de línea y de superficie dedicamos los ejercicios del último tema a ejemplos relativos a tres resultados clásicos del análisis de funciones de varias variables: los teoremas de Green, Gauss y Stokes. Estos resultados relacionan la integración de campos vectoriales sobre curvas o superficies del plano o el espacio, con la integración, en regiones de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, de ciertas "derivadas" de los campos anteriores. Una breve sección tratará también con el uso de potenciales vectoriales para el cálculo de integrales de superficie a través del Teorema de Stokes.

SECCIÓN 5.1

Campos vectoriales

Encontrar el rotacional y la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

805 $F(x, y, z) = (x^2y, yz^2, zx^2)$.

806 $F(x,y,z) = (y^2 z, 0, -x^2 yz)$.

807 $F(x,y,z) = (xe^y, -ze^{-y}, y\log z)$.

808 $F(x,y,z) = \big(e^{xyz}, \operatorname{sen}(x-y), \frac{xy}{z}\big)$.

Solución 807:

Encontrar el rotacional y la divergencia de un campo F supone realizar unas cuantas derivadas parciales y su cálculo no debe plantear mayores dificultades. En concreto, se tiene

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right).$$

Para el caso concreto en que

$$F(x,y,z) = \left(xe^y, -ze^{-y}, y\log z\right),$$

tendremos

$$\operatorname{div} F = e^y + ze^{-y} + \frac{y}{z},$$

$$\operatorname{rot} F = \left(-e^{-y} - \log z, 0, xe^y\right).$$

809 *Demostrar que cualquier campo vectorial de la forma $F(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z))$, donde f, g y h son funciones diferenciables, es irrotacional.*

Si f es una función escalar de tres variables y F y G campos vectoriales tridimensionales, probar las siguientes identidades:

810 $\mathit{div}\,(\nabla \times F) = 0$.

811 $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

812 $\mathit{div}\,(fF) = f\,\mathit{div}\,F + (\nabla f)\cdot F$.

813 $\mathit{div}\,(F \times G) = F\cdot(\nabla \times G) - G\cdot(\nabla \times F)$.

814 $\nabla \times (fF) = f(\nabla \times F) + (\nabla f)\times F$.

Solución 813:

Las identidades involucrando varios campos y los operadores rotacional y divergencia se comprueban realizando las derivaciones indicadas (teniendo en cuenta la regla del producto) y reagrupando términos de modo conveniente. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F\times G) &= \operatorname{div}\,(F_2G_3 - F_3G_2, F_3G_1 - F_1G_3, F_1G_2 - F_2G_1) \\
&= \frac{\partial\,(F_2G_3 - F_3G_2)}{\partial x} + \frac{\partial\,(F_3G_1 - F_1G_3)}{\partial y} + \frac{\partial\,(F_1G_2 - F_2G_1)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z} \\
&= F_1\left(\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial y}\right) + F_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right) + F_3\left(\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial x}\right) \\
&- G_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right) - G_2\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - G_3\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) \\
&= F\cdot(\nabla\times G) - G\cdot(\nabla\times F)\,.
\end{aligned}$$

Sea $F = (x, y, z)$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector constante. Probar:

815 *div* $(\mathbf{a}\times F) = 0$.

816 $\nabla\times(\mathbf{a}\times F) = 2\mathbf{a}$.

817 *div* $((F\cdot F)\mathbf{a}) = 2F\cdot\mathbf{a}$.

818 $\nabla\times((F\cdot F)\mathbf{a}) = 2(F\times\mathbf{a})$.

Solución 818:

Se trata de realizar las derivadas con un poco de cuidado. Obsérvese que si $F = (x, y, z)$, entonces $F \cdot F = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. De este modo

$$\nabla \times (r^2 a) =$$
$$= \left(\frac{\partial(r^2 a_3)}{\partial y} - \frac{\partial(r^2 a_2)}{\partial z}, \frac{\partial(r^2 a_1)}{\partial z} - \frac{\partial(r^2 a_3)}{\partial x}, \frac{\partial(r^2 a_2)}{\partial x} - \frac{\partial(r^2 a_1)}{\partial y} \right)$$
$$= (2ya_3 - 2za_2, 2za_1 - 2xa_3, 2xa_2 - 2ya_1) = 2(F \times a).$$

Sección 5.2

Teorema de Green

819 *Usar el teorema de Green para evaluar la integral*

$$\int_C y\,dx - x\,dy,$$

donde C *es la frontera del cuadrado* $[0, 1] \times [0, 1]$ *orientada en sentido positivo.*

Verificar el teorema de Green en los siguientes casos:

820 *El disco* $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ *y el campo* $F(x, y) = (xy, xy)$.

821 *El anillo* $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ *y el campo* $F(x, y) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$.

Solución 821:

El teorema de Green asegura que para un dominio D en el plano con frontera ∂D^+ orientada de modo que D queda a la izquierda, y un campo $F = (P, Q)$ se tiene

$$\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

En nuestro caso concreto D es el anillo centrado en el origen con radio exterior 2 y radio interior 1 (ver Figura 56). De esta suerte la frontera de D consta de estos dos círculos que debemos orientar

de modo contrario a fin de que la región delimitada quede a la izquierda según vamos recorriendo las curvas. La parametrización de ambos será

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\theta, \quad y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\ x &= \cos\theta, \quad y = \mathrm{sen}\,\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

y la única precaución es añadir un signo menos a la integral sobre el círculo interior debido a que debe recorrerse en sentido horario. Con un poco de cuidado en los cálculos tenemos

$$\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$\int_0^{2\pi} \big[(16\cos^3\theta - 8\,\mathrm{sen}^3\,\theta)(-2\,\mathrm{sen}\,\theta)+$$

$$(8\cos^3\theta + 3\,\mathrm{sen}^3\,\theta)2\cos\theta - (2\cos^3\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta)(-\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$+(\cos^3\theta + \mathrm{sen}^3\,\theta)\cos\theta\big]\ d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-30\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 15\,\mathrm{sen}^4\,\theta + 15\cos^4\theta + 15\,\mathrm{sen}^3\cos\theta\right)\,d\theta$$

$$= \frac{45}{2}\pi.$$

Al calcular esta última integral, hemos tenido en cuenta que el

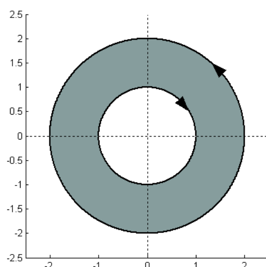


Figura 56. Gráfica del Ejercicio **821**

primer y último sumando no contribuyen a la integral, mientras

que para $\cos^4\theta$ y $\operatorname{sen}^4\theta$ hemos usado repetidamente las fórmulas del ángulo doble (cf. Ejercicio **536**).

Por otro lado, transformando la integral doble a polares,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 3r^2 r\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\pi\, r^4\Big|_1^2 = \frac{45}{2}\pi.$$

822 *Por medio del teorema de Green, calcular*

$$\int_C (x^3+y^3)\,dy - (x^3+y)\,dx,$$

donde C es el círculo $x^2+y^2=1$ recorrido en sentido contrario al reloj.

823 *Aplicar el Teorema de Green para evaluar la integral de línea*

$$\int_C x^2y\,dx + xy^2\,dy$$

donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y=x^2$, $y=8-x^2$.

Solución 823:

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \int_C (x^2y\,dx + xy^2\,dy) = \iint_D (2xy - x^2)\,dx\,dy.$$

La región D se describe como

$$-2 \le x \le 2, \quad x^2 \le y \le 8-x^2,$$

y en consecuencia

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} (y^2 - x^2)\,dx\,dy = \frac{2816}{7}.$$

824 *Sea $F(x,y) = (2y+e^x, x+\operatorname{sen}(y^2))$ y C el círculo $x^2+y^2=1$ con orientación positiva. Escribir $\int_C F$ como una integral doble y evaluar.*

825 *Sea C la frontera del rectángulo $[1,2]\times[1,2]$. Evaluar* $\displaystyle\int_C x^2y\,dx + 3yx^2\,dy$ *con orientación positiva usando el teorema de Green.*

Usar el teorema de Green para calcular el área de las siguientes regiones planas:

826 *El triángulo de vértices* $(1,0)$, $(3,4)$, $(5,-1)$.

827 *El cuadrilátero de vértices* $(0,-1)$, $(3,0)$, $(1,-2)$, $(4,3)$.

828 *El área entre las curvas* $y = x^3$ *e* $y = \sqrt{x}$.

829 *Región acotada por la astroide* $(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución:

827 Recordemos en primer lugar que el área de una región D encerrada por una curva con orientación positiva C^+ viene dada por

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{C^+} (x\,dy - y\,dx).$$

Para encontrar el área de la figura cerrada formada por varios segmentos mediante el teorema de Green, debemos preocuparnos por integrar sobre segmentos de recta. En particular, sobre el segmento que empieza en el punto $A = (a_1, a_2)$ y acaba en $B = (b_1, b_2)$ podemos usar la parametrización

$$(1-t)(a_1, a_2) + t(b_1, b_2), \quad t \in [0,1].$$

Así la contribución a la integral anterior sobre este segmento será

$$\frac{1}{2}\int_0^1 [((1-t)a_1 + ta_2)(b_2 - b_1) \\ -((1-t)a_2 + tb_2)(b_1 - a_1)]\ dt.$$

Después de unos cuantos cálculos y cancelaciones, llegamos a que tal integral vale

$$\frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Un sencillo argumento inductivo nos dirá que si una región esta limitada por los segmentos que unen los puntos $A_i = (a_1^i, a_2^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ donde $A_1 = A_n$, entonces el área de tal figura será

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} A_i \\ A_{i+1} \end{pmatrix},$$

(Véase el problema **832**).

En el caso concreto que nos ocupa, tras concretar el orden en el que deben tomarse los puntos, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right.$$
$$\left. + \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = 6.$$

829 La curva astroide o hipocicloide está representada en la Figura 89. Para encontrar el área que encierra, usamos el teorema de Green

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_C (x\,dy - y\,dx).$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\,\text{sen}^2 t \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2t)\,dt = \frac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

Hemos usado las fórmulas del ángulo doble para realizar esta última integración.

830 *Usar la forma vectorial del teorema de Green para probar la primera identidad de Green:*

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \int_{\partial D^+} f(\nabla g)\cdot \mathbf{n}\,d\sigma - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g\,dA$$

donde D satisface las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales de f y g (que son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$) existen y son continuas allí donde sea necesario.

831 *Aplicar la primera identidad de Green para probar la segunda identidad de Green:*

$$\iint_D \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\, dA = \int_{\partial D^+} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

en las mismas condiciones del Ejercicio **830**.

832 (a) *Sea C un segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) con (x_2, y_2). Probar que*

$$\frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

(b) *Denotemos por (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n) los vértices de un polígono recorridos en sentido antihorario alrededor del mismo. Usar el apartado anterior para probar que el área del polígono es*

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

donde $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$.

833 *Si R es una región del plano tal que $C = \partial R$ está orientada positivamente, probar que para toda función dos veces diferenciable:*

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x}\, dy - \frac{\partial f}{\partial y}\, dx = \iint_R \Delta f\, dA.$$

834 *Sean $P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $Q(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$:*

(a) *Comprobar que $\displaystyle\int_{\partial R^+} P\, dy - Q\, dx = \iint_R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dA$, con R el anillo entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.*

(b) *Probar que $\displaystyle\int_{\partial D^+} P\, dy - Q\, dx \neq \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dA$, con D el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.*

(c) *Explicar la aparente contradicción del apartado anterior con el Teorema de Green.*

835 *Calcula la integral*

$$I = \int_C y^3\,dx + x^3\,dy,$$

donde C es la curva dada en polares con ecuación $r = \operatorname{sen}(2\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

Solución 835:

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \iint_D 3(x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

donde D es la región encerrada por la curva cerrada C, que corresponde a un cuarto de la rosa de cuatro pétalos (véase Figura 57). Calculando esta integral doble en coordenadas polares, puesto que su frontera nos la proporcionan en estas coordenadas, tendremos

$$\begin{aligned} I =& 3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}(2\theta)} r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) r\,dr\,d\theta \\ =& \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^4(2\theta)\,d\theta = \frac{3}{40}\operatorname{sen}^5(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

836 *Se considera la curva C parametrizada por $\sigma(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Para el campo $F(x, y) = (y - x, y^2)$, calcular la integral de línea $\int_C F$ mediante el teorema de Green.*

Solución 836:

En esta situación no podemos aplicar directamente el teorema de Green puesto que la curva C no es una curva cerrada. Si usamos otra curva C_0 que una los puntos $(2\pi, 0)$ y $(0, 0)$, la unión de estas dos curvas sí es cerrada y por tanto limita una región en el plano. De entre todas las posibles opciones, la más sencilla será la recta que una estos dos puntos. Pero en este caso debemos tener muy presente que al cruzarse estas dos curvas las orientaciones pueden inducirnos a error si no lo hacemos con cuidado (véase la Figura 58(a)). Lo más aconsejable es dividir los cálculos en dos

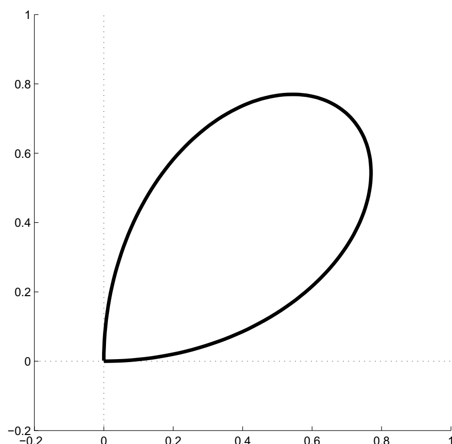


Figura 57. Curva del Ejercicio **835**

partes que corresponden a las dos regiones que en realidad limitan las dos curvas. Llamemos a estas dos regiones D_1 y D_2. Entonces si $F = (P, Q)$, podemos escribir

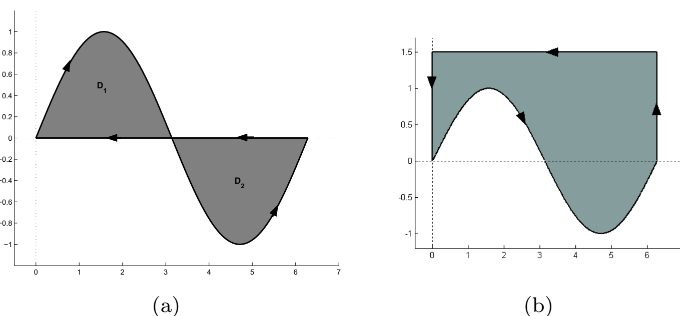
$$\int_C F + \int_{C_0} F$$
$$= \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Si realizamos los cálculos, no es difícil comprobar que

$$\int_{C_0} F = 2\pi^2,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$
$$\iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = -\text{Area}(D_i), \quad i = 1, 2,$$

pues por simetría ambas regiones tienen el mismo área. En consecuencia, la integral solicitada vale $-2\pi^2$.

Otra opción hubiera sido cerrar con la curva mostrada en la Figura 58(b), para evitar los problemas de orientación.



(a) (b)

Figura 58. Dos posibilidades de cierre en el Ejercicio **836**

837 *Se considera la curva cerrada C de parametrización*

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

que encierra un recinto R, y los campos escalares $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = y$. Se pide:

(a) Calcular $\displaystyle\int_C P\,dy - Q\,dx$.

(b) Probar que $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA > 0$.

(c) Explicar la aparente contradicción de los apartados anteriores con el Teorema de Green.

Solución 837:

(a) Con la parametrización dada, se calcula inmediatamente que

$$\int_C P\,dy - Q\,dx = 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt,$$

y escribiendo

$$\operatorname{sen}^3 t = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t,$$

se llega a la conclusión de que la integral anterior es nula.

(b) Por otro lado

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2$$

y por tanto

$$\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = 2\text{Area}(R) > 0.$$

(c) De los apartados anteriores se tiene que

$$0 = \int_C P\,dy - Q\,dx = [\text{Green}] = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA > 0$$

de lo cual deducimos que algo falla en la aplicación del Teorema de Green. Este fallo viene provocado porque la curva C no es simple, esto es, se corta a sí misma ($\alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha(2\pi)$, véase la Figura 59), de forma que a mitad de recorrido incumple la orientación adecuada en el Teorema de Green.

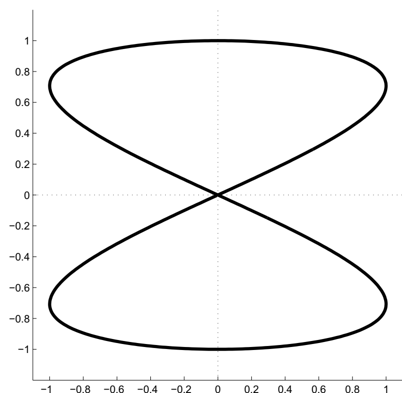


Figura 59. Ejercicio **837**: curva no simple

838 *Calcular la integral de línea* $\int_C F$ *siendo* $F(x,y) = (e^x - y^3, \cos y + x^3)$ *y* C *la circunferencia unidad.*

Sección 5.3

Teorema de Gauss

Calcular mediante el teorema de la divergencia y con orientación exterior $\int_{\partial\Omega} F$*, en los siguientes casos:*

839 $F = (x^2, y^2, z^2)$, $\Omega = [0,1]^3$.

840 $F = (y, z, xz)$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

841 $F = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución:

840 De acuerdo con el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{\partial\Omega} F = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV.$$

En este caso, se encuentra de modo inmediato que

$$\operatorname{div} F = x,$$

de modo que la integral que se nos pide es

$$\iiint_{\Omega} x \, dV.$$

Podemos razonar que esta integral es nula, debido a la simetría. La región Ω es simétrica respecto del eje Z en el sentido de que es una región de rotación alrededor de este eje. En consecuencia la integral de la variable x debe anularse.

841 En el ejemplo que nos ocupa, tendremos

$$\operatorname{div} F = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

de modo que, usando las coordenadas esféricas para calcular la integral resultante,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} 3\rho^4 \operatorname{sen} \psi \, d\psi \, d\rho \, d\theta.$$

Las integraciones que se deben realizar son inmediatas. El resultado final es $\frac{12\pi}{5}$.

Calcular el flujo a través de S del campo F mediante el teorema de Gauss, con orientación exterior para:

842 *$F = (x^2, 0, 1)$; S es la superficie del cubo limitado por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 4$.*

843 *$F = (3x, 2y, 6z)$; S es la superficie del tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.*

844 *$F = (x, y, z)$; S es la superficie limitada por $z = -x^2 - y^2 - 2x + 4y + 4$ y por el plano XY.*

Solución 843:

El flujo de un campo a través de una superficie cerrada S que encierra una región sólida R de modo que $S = \partial R$, se puede calcular a través del teorema de la divergencia. En efecto

$$\int_S F = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV.$$

En este caso concreto $\operatorname{div} F = 11$, de modo que el flujo será 11 veces el volumen del tetraedro. Dicho volumen es la unidad en este ejemplo. Se puede calcular mediante la integral triple

$$\int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{1/2(6-6x-3y)} dz\, dy\, dx = 1.$$

Por lo tanto el flujo es 11.

845 *Calcular la integral $\int_S F$ donde S es la frontera de la media bola $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, y $F = (x + 3y^5, y + 10xz, z - xy)$ con orientación exterior.*

846 *Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción de superficie S determinada por*

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 \le 2x, \qquad z \ge 0,$$

y orientada exteriormente, directamente y mediante el teorema de Gauss.

Solución 846:

La superficie S propuesta admite parametrización mediante las coordenadas cilíndricas del siguiente modo

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$$

En consecuencia el vector normal es, después de algunos cálculos,

$$\mathbf{n}(r,\theta) = r(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, -1).$$

Así el producto escalar $F(\Phi(r,\theta)) \cdot \mathbf{n}(r,\theta) = 0$, y el flujo de F sobre dicha superficie es también nulo.

Para llegar a esta misma conclusión usando el teorema de la divergencia, debemos completar la superficie S hasta limitar una región del espacio. En esta elección tenemos libertad completa pero debemos hacerlo de suerte que las integrales involucradas sean lo más sencillas posibles. Probablemente la elección más sencilla corresponda a considerar el cilindro, R, tal y como se muestra en la Figura 60,

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

La frontera de este sólido está formada por la superficie S anterior (con orientación contraria a la que hemos usado), la superficie lateral del cilindro anterior, S_l,

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

y la tapa inferior, S_0,

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad z = 0.$$

Por el teorema de la divergencia tendremos

$$\iiint_R \mathrm{div}\, F\, dV = \int_S F + \int_{S_l} F + \int_{S_0} F.$$

Calculamos estas integrales de manera separada. Sobre S_0 es fácil comprobar que, si $\mathbf{N}$ es la normal unitaria exterior,

$$F \cdot \mathbf{N} = (x,y,z) \cdot (0,0,-1) = -z = 0, \quad \text{pues } z = 0 \text{ sobre } S_0.$$

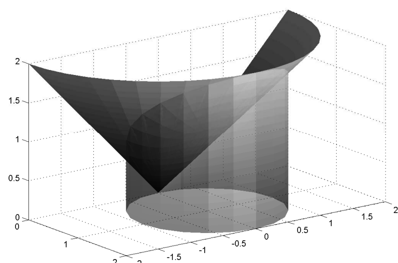


Figura 60. Gráfica del Ejercicio **846**

Sobre S_l tenemos la parametrización

$$\Phi(\theta, z) = (2\cos^2\theta, 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta, z),\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq z \leq 2\cos\theta$$

y el vector normal

$$\mathbf{n}(\theta, z) = (2\cos(2\theta), 2\operatorname{sen}(2\theta), 0).$$

El producto escalar $F(\Phi(\theta, z)) \cdot \mathbf{n}(\theta, z)$ después de algunos cálculos resulta $4\cos^2\theta$, y por tanto la integral será

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} 4\cos^2\theta \, dz \, d\theta = \frac{32}{3}.$$

Finalmente, como $\operatorname{div} F = 3$,

$$\iiint_R \operatorname{div} F \, dV = 3\mathrm{Vol}(R).$$

Para calcular el volumen de R usamos las coordenadas cilíndricas para obtener

$$\mathrm{Vol}(R) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{32}{9}.$$

Por último, la integral que nos interesa será

$$\int_S F = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV - \int_{S_l} F - \int_{S_0} F = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0,$$

como ya sabíamos.

847 *Verificar el teorema de Gauss para el campo* $F = (xz, yz, xy)$ *sobre la región limitada por* $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ *y* $z \leq 4 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

848 *Sea* $F = (2x, 3y, 5z + 6x)$ *y* $G = (3x + 4z^2, 2y + 5x, 5z)$. *Probar que*

$$\int_S F = \int_S G$$

donde S *es cualquier superficie frontera de alguna región del espacio.*

Solución 848:

Este ejercicio se reduce a comprobar que los campos F y G son tales que $\operatorname{div} F = \operatorname{div} G$. Esto es de muy sencilla comprobación. Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia podemos concluir

$$\int_S F = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R \operatorname{div} G \, dV = \int_S G,$$

donde R es la región cuya frontera es la superficie cerrada S.

849 *Evaluar la integral* $\int_S \nabla \times F$ *donde* S *es el elipsoide* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, *y* $F = (\operatorname{sen}(xy), e^x, -yz)$ *con orientación exterior.*

Solución 849:

La integral solicitada es nula pues el campo $\nabla \times F$ es un campo con divergencia nula

$$\operatorname{div}(\nabla \times F) = 0,$$

al ser un rotacional. Por el teorema de la divergencia su integral sobre cualquier superficie cerrada será nula.

850 *Sea* S *el casquete de paraboloide* $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. *Se considera el campo vectorial:*

$$F = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Hallar el flujo de F *a través de* S *hacia el exterior.*

Solución 850:

No es difícil comprobar que el campo F tiene divergencia nula. Pero debemos tener la precaución de observar que no está definido en el origen. Luego cualquier región en la que trabajemos con dicho campo debe evitar el origen. En particular consideremos la superficie S_1 que consiste en el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y S_2, el anillo entre las circunferencias de radio 1 y 2 sobre el plano $z = 0$. Sea R la región limitada por estas tres superficies S, S_1 y S_2 (véase la Figura 61). Como el campo F tiene divergencia nula, concluimos que

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} F\, dV = \int_S F + \int_{S_1} F + \int_{S_2} F,$$

considerando las orientaciones apropiadas (exteriores). En consecuencia

$$\int_S F = -\int_{S_1} F - \int_{S_2} F.$$

La última de estas dos integrales se calcula de manera directa pues la normal unitaria exterior es $(0, 0, -1)$, luego

$$F \cdot (0, 0, -1) = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

y la integral queda

$$\int_{S_2} -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dS = 0$$

pues S_2 se encuentra sobre el plano $z = 0$.

En cuanto a la otra integral observamos que la normal exterior unitaria es $\mathbf{N} = -(x, y, z)$ y

$$F \cdot \mathbf{N} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -1,$$

Finalmente

$$\int_S F = \text{Area}(S_1) = \frac{4\pi}{3}.$$

851 *Sea $F = (x, y, z)$ y D una región del espacio con frontera ∂D. Probar que el volumen de D viene dado por $\frac{1}{3}\int_{\partial D} F$. Usar este*

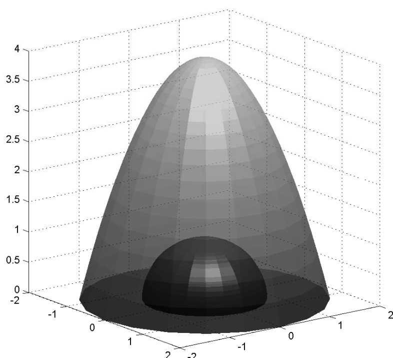


Figura 61. Región del Ejercicio **850**

hecho para calcular el volumen de un cono circular de altura h y radio a.

852 *Sea S una superficie cerrada que encierra un volumen D, y sea $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ la derivada direccional de una función escalar en la dirección de la normal unitaria exterior a S. Probar que*

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \iiint_D \Delta f \, dV$$

853 *Sea R el recinto en el espacio limitado por las superficies $x^2+y^2-z=0$ y el hemisferio superior de $x^2+y^2+z^2=1$, y sea S la superficie frontera de R. Considera el campo $F=(x^3-y^3, y^3-z^3, z^3-x^3)$. Usando el teorema de la divergencia, transforma $I=\int_S F$, y escribe la integral resultante en coordenadas cilíndricas (no es necesario calcular la integral final).*

854 *Sea $F=(-xz, -yz, x^2+y^2+z^2)$ y S la superficie*

$$S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2}\}.$$

Calcular la integral, con orientación exterior $I = \int_S F$.

Solución 854:

Sean S_+ y S_- las dos tapas

$$z = \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \le \frac{3}{4},\ \text{y}\ z = -\frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \le \frac{3}{4},$$

respectivamente. Si completamos S con estas dos tapas orientadas exteriormente tendremos, por el teorema de la divergencia,

$$\iiint_R \operatorname{div} F\, dV = \int_S F + \int_{S_+} F + \int_{S_-} F.$$

Ahora bien, es inmediato comprobar que $\operatorname{div} F = 0$ y que las normales unitarias sobre S_+ y S_- son, respectivamente, $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$. Por tanto

$$\int_{S_+} F + \int_{S_-} F = \int_{S_+} (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}) - \int_{S_-} (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}) = 0,$$

pues la proyección de S_+ y S_- sobre el plano XY es la misma. Concluimos que la integral solicitada es nula.

855 *Calcula la integral del campo* $F = (xz^2 - xy^2, yx^2 - yz^2, zy^2 - zx^2)$ *sobre la superficie* $S = \{z^2 - x^2 - y^2 = 0,\ 1 \le z \le 2\}$*, orientada al exterior.*

856 *Sea* S *la superficie dada por*

$$S = \{x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \le z \le 1\} \cup \{3 - z = x^2 + y^2,\ 1 \le z \le 2\}.$$

Calcular el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ *a través de* S*, con orientación interior,*

(a) *Directamente.*

(b) *Usando el Teorema de Gauss.*

Solución 856:

(a) Denotemos por S_1 y S_2 las dos partes de S, respectivamente y por S_3

$$\left\{3 - z = x^2 + y^2,\ 2 \leq z \leq 3\right\}.$$

Nótese que $S \cup S_3$ forma una superficie cerrada que limita la región del espacio atrapada por los dos paraboloides $2z = x^2 + y^2$ y $3 - z = x^2 + y^2$ (véase la Figura 62).

Las integrales del campo F sobre S_1 y S_2 requieren sendas parametrizaciones. Las coordenadas cilíndricas proporcionan la mejor parametrización en ambos casos. Así sobre S_1

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2}r^2), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

Después de calcular los vectores tangentes con respecto a θ y a r, evaluar el vector normal y realizar el producto escalar con F, se llega a que debemos integrar la expresión

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}r^3\right)\,dr\,d\theta = -\pi.$$

Sobre S_2 tenemos de manera análoga

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 3 - r^2), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

Igual que antes, desembocamos en la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \left(-3r - r^3\right)\,dr\,d\theta = -\frac{9}{2}\pi.$$

Por la tanto la integral pedida sobre S es la suma de estas dos integrales. Su valor es $-\frac{11\pi}{2}$.

(b) Por otro lado, hemos indicado que la unión de S y S_3 limita la región encerrada por los dos paraboloides. Si llamamos R a dicha región, por el teorema de la divergencia tendremos

$$-\iiint_R \operatorname{div} F\,dV = \int_S F + \int_{S_3} F.$$

El signo menos obedece a las orientaciones que hemos usado en S. Por lo tanto podemos encontrar la integral de F sobre

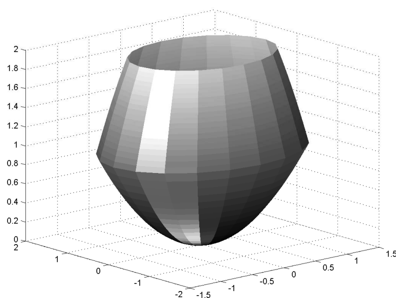


Figura 62. Región del Ejercicio **856**

S calculando los otros dos términos. Para la integral sobre R usamos las coordenadas cilíndricas. En efecto

$$-\iiint_R \operatorname{div} F\, dV = -\,3\text{Area}(R)$$

$$= -\,3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2/2}^{3-r^2} dz\, dr\, d\theta = -9\pi.$$

Para S_3 usamos una parametrización idéntica a la empleada con S_2 pero con límites de integración para r entre 0 y 1. Así llegamos a la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-3r - r^3\right)\, dr\, d\theta = -\frac{7}{2}\pi.$$

De este modo, encontramos que

$$\int_S F = -9\pi + \frac{7}{2}\pi = -\frac{11}{2}\pi,$$

tal y como habíamos obtenido antes.

857 *Calcular la integral de superficie* $\int_S (xy^2, x^2y, y)$ *siendo* S *la superficie formada por la unión de*

$$\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

y

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = \pm 1\}$$

Sección 5.4

Teorema de Stokes

Verificar el teorema de Stokes para los campos F y superficies S siguientes:

858 *$F = (-y, x, z)$; S es la porción del cilindro $z = x^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.*

859 *$F = (5y, 3x, z^4)$; S es la porción de $z = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8$ bajo el plano $z = 5$.*

860 *$F = (x, y, z)$; S el grafo de $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.*

861 *$F = (yz, xz, xy)$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.*

Solución 859:

Una parametrización para S se obtiene mediante una traslación de las coordenadas cilíndricas

$$(2 + r\cos\theta, 2 + r\operatorname{sen}\theta, r^2), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq \sqrt{5}.$$

El rotacional de F es el campo $(0, 0, -2)$. La integral de este rotacional sobre S conduce, después de los cálculos oportunos, a la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (-2r)\, dr\, d\theta = -10\pi.$$

Por el teorema de Stokes, podemos también encontrar este valor mediante la integral de F sobre la curva frontera de S, parametrizada por

$$(2 + \sqrt{5}\cos\theta, 2 + \sqrt{5}\operatorname{sen}\theta, 5), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto escalar de F por el vector tangente resulta ser

$$-10\sqrt{5}\operatorname{sen}\theta - 25\operatorname{sen}^2\theta + 6\sqrt{5}\cos\theta + 15\cos^2\theta.$$

La integral de esta expresión sobre el intervalo $(0, 2\pi)$ (recordando las fórmulas del ángulo doble) conduce al valor -10π que coincide con el anterior.

Calcular $\int_C F \cdot d\sigma$ *para:*

862 $F = (0, -x, 2x + 3y + z^5)$; *con* C *la intersección entre* $x + y + z = 1$ *y* $x^2 + y^2 = 1$.

863 $F = (0, 0, xy)$; *con* C *la intersección de* $z = y$ *con* $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

864 $F = (xyz, z^2, xz)$; *con* C *la intersección de* $z = x^2 + y^2$ *con* $z = x$.

Solución 863:

Por el teorema de Stokes, podemos encontrar la integral de línea que nos piden integrando el rotacional de F sobre una superficie cuya frontera sea la curva dada. La elección más sencilla es la región plana en $z = y$ que encierra la curva, es decir,

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad z = y.$$

Una parametrización de esta superficie es

$$(1 + r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1.$$

El rotacional de F es $(x, -y, 0)$ mientras que el vector normal asociado a la parametrización es $(0, -r, r)$. De este modo tenemos que encontrar la integral sobre la región en que se mueven los parámetros de la función que proviene del producto escalar del rotacional de F por el vector normal anterior, es decir,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 0.$$

Luego la integral pedida es nula.

865 *Calcular la integral*

$$\int_S \nabla \times F$$

donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $F = (x^3, -y^3, 0)$ con orientación exterior. Calcular esta misma integral si S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

866 *Usando el teorema de Stokes evaluar la integral de $F = (xy, yz, xz)$ sobre la curva C formada por los tres segmentos de recta que unen los puntos $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,3)$.*

Solución 866:

Mediante el teorema de Stokes podemos escribir

$$\int_C F = \int_S \nabla \times F,$$

donde S debe ser una superficie cuya frontera es la curva C. En el caso concreto que nos ocupa, la superficie S es el trozo de plano (triángulo) limitado por los vértices dados. Dicha superficie tiene parametrización

$$(x, y, 3(1 - y - \frac{x}{2})), \quad 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

El vector normal asociado a esta parametrización es constante $(\frac{3}{2}, 3, 1)$ y el rotacional de F es el campo (y, z, x). Así pues la integral que buscamos se escribe

$$\int_0^2 \int_0^{1-x/2} \left(-\frac{15}{2}y - \frac{7}{2}x + 9 \right) dy\, dx.$$

Después de unos cuantos cálculos, se llega al valor de esta integral que es $\frac{25}{6}$.

867 *Supongamos que S_1 y S_2 son dos superficies con la misma frontera C. Probar que*

$$\int_{S_1} \nabla \times F = \int_{S_2} \nabla \times F$$

Aplicar esta idea para evaluar la integral

$$\int_S \nabla \times F$$

siendo S la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y $x+y+z\geq 1$, con $F=(-z,-z,0)$.

868 *Sea*

$$F(x,y,z)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right).$$

(a) *Mostrar que la integral de F sobre el círculo unitario $C=\{x^2+y^2=1,z=0\}$ vale 2π. Concluir que F no puede ser conservativo.*

(b) *Comprobar sin embargo que $\nabla\times F=0$. ¿Qué falla para este F?*

869 *Sea C la curva intersección de las superficies $x+y+z=0$ y $x^2+y^2+z^2=1$, y F el campo (z,x,y). Calcular la integral $\int_C F$.*

Solución 869:

Por el teorema de Stokes, la integral que deseamos calcular puede encontrarse integrando el rotacional de F, que es el vector constante $(1,1,1)$ sobre una superficie cualquiera (lo más sencilla posible) cuya frontera sea precisamente la curva C. Nótese la relación de este problema con el **867**. Indudablemente la superficie más sencilla que podemos elegir es

$$x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

Nótese que

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z\geq 0,$$

es también una elección correcta.

Como la superficie que hemos elegido es un trozo de plano, la componente normal del rotacional de F sobre este plano será el producto escalar

$$(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\sqrt{3}.$$

De esta suerte la integral que buscamos es

$$\sqrt{3}\text{Area}(S).$$

Como S es un círculo máximo de la esfera unitaria, su área es π, y la integral que nos piden vale $\sqrt{3}\pi$.

870 *Sea S el helicoide con parametrización*

$$\Phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v), \qquad 0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 1,$$

y el campo $F = (xy, yz, xz)$. Verificar el teorema de Stokes en esta situación:

(a) Calcula $\displaystyle\int_S \nabla \times F$ usando la parametrización dada.

(b) Calcula directamente $\displaystyle\int_{\partial S} F$, donde ∂S es la curva frontera del helicoide.

Solución 870:

En primer lugar, calculamos la integral del rotacional de F directamente sobre el helicoide (véase la Figura 63) cuya parametrización nos proporcionan. Tras unos cálculos más o menos directos, desembocamos en la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-u \operatorname{sen}^2 v + v\cos v - u^2\cos v\right)\, du\, dv$$

cuyo valor es $-\frac{\pi}{2}$.

Para comprobar el teorema de Stokes en este ejemplo, debemos tener un poco de cuidado en describir perfectamente la frontera del helicoide. Dicha frontera consta de cuatro partes cuyas parametrizaciones damos a continuación

$$\begin{aligned}
u = 1 &\longrightarrow (\cos v, \operatorname{sen} v, v), \quad 0 \le v \le 2\pi,\\
u = 0 &\longrightarrow (0,0,v), \quad 0 \le v \le 2\pi,\\
v = 2\pi &\longrightarrow (u,0,2\pi), \quad 0 \le u \le 1,\\
v = 0 &\longrightarrow (u,0,0), \quad 0 \le u \le 1.
\end{aligned}$$

Se trata por tanto de calcular la integral del campo F sobre cada una de estas curvas y sumar los resultados finales. La primera de

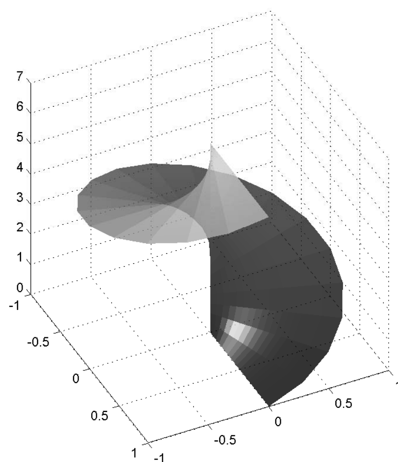


Figura 63. Helicoide del Ejercicio **870**

estas integrales es

$$\int_0^{2\pi} \left(-\cos v \operatorname{sen}^2 v + v \cos v \operatorname{sen} v + v \cos v\right)\, dv = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que las otras tres son trivialmente nulas. Como cabía esperar los resultados coinciden.

871 *Para el campo* $F = (yz - y, xz + x, xy)$ *y la curva* C *intersección del plano* $x+y+z = 1$ *y el cilindro* $x^2+y^2 = 1$, *calcular la integral* $I = \int_C F$.

SECCIÓN 5.5

Potenciales vectoriales

Determinar si existe un campo vectorial G *tal que:*

872 $\nabla \times G = (xy^2, yz^2, zx^2)$.

873 $\nabla \times G = (yz, xz, xy)$.

874 *Se considera la superficie* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ 2z - y \geq 6,\ z \leq 8\}$ *y el campo vectorial* $F(x,y,z) = (-2z, -1, 1)$. *Hallar el flujo de* F *a través de* S *con orientación exterior usando el Teorema de Stokes.*

Solución 874:

La superficie S es el cono $x^2 + y^2 = z^2$ limitado por los planos $2z - y = 6$ y $z = 8$, que puede verse en la Figura 64. Para poder

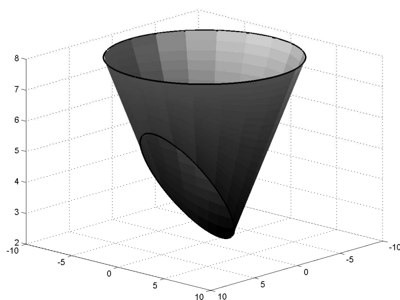


Figura 64. Superficie del Ejercicio **874**

aplicar el Teorema de Stokes al cálculo de una integral de superficie tenemos que escribir F como un rotacional. Esto es posible porque $\operatorname{div} F = 0$. Así, $F = \nabla \times G$, donde G es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial G_3}{\partial y} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} & = & -2z \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \dfrac{\partial G_3}{\partial x} & = & -1 \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} & = & 1 \end{array}\right\}$$

Si ponemos que $G_3 = 0$, entonces

$$-\frac{\partial G_2}{\partial z} = -2z \Rightarrow G_2 = z^2 + \varphi(x,y)$$

y

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = -1 \Rightarrow G_1 = -z + \psi(x, y).$$

Sustituyendo en la tercera, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 1$. Una posible elección puede ser $\varphi = x$, $\psi = 0$.

Así pues un potencial para F es $G = (-z, z^2 + x, 0)$. Entonces,

$$\int_S F = \int_S \nabla \times G = [\text{Stokes}] = \int_{\partial S} G.$$

La frontera de S está formada por las curvas C_1, la intersección del cono con el plano $z = 8$, y C_2, la intersección del cono con el plano $2z - y = 6$.

C_1 es la circunferencia de radio 8 situada en el plano $z = 8$; una parametrización es

$$\alpha_1(t) = (8\cos t, 8\operatorname{sen} t, 8), \quad t \in [0, 2\pi]$$

la cual tiene orientación contraria a la que indica el Teorema de Stokes.

Para obtener una parametrización de C_2 eliminamos z de ambas ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = \frac{y}{2} + 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{4}\right)^2 = 1,$$

que parametrizamos como una elipse desplazada sobre el plano $z = \frac{y}{2} + 3$

$$\alpha_2(t) = (\sqrt{12}\cos t, 2 + 4\operatorname{sen} t, 4 + 2\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

que está bien orientada. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_S F\cdot &= -\int_{C_1} G + \int_{C_2} G\\ &= -\int_0^{2\pi} (-8, 64+8\cos t, 0)\cdot(-8\,\mathrm{sen}\,t, 8\cos t, 0)\,dt\\ &\quad+\int_0^{2\pi} \Big[(-4-2\,\mathrm{sen}\,t, (4+2\,\mathrm{sen}\,t)^2+\sqrt{12}\cos t, 0)\\ &\quad\cdot(-\sqrt{12}\,\mathrm{sen}\,t, 4\cos t, 2\cos t)\Big]\,dt,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,t\,dt = 0,$$

y que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi,$$

se tiene

$$\int_S F = (-64+6\sqrt{12})\pi.$$

875 *Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (2x, 4-y, -z)$ a través de la porción de paraboloide $4-z = x^2+y^2$ limitada por $y+z=4$ y $z=1$ orientada al exterior, mediante los teoremas de Gauss y Stokes.*

Solución 875:

Es muy sencillo comprobar que el campo F proporcionado tiene divergencia nula, luego admite potenciales vectoriales. Un tal potencial vectorial se encuentra de manera sencilla como

$$G = ((4-y)z, -2xz, 0), \quad \nabla\times G = F,$$

sin más que seguir las pautas mostradas en el Ejercicio **874**.

Por el teorema de Stokes, podemos escribir

$$\int_S F = \int_S \nabla\times G = \int_{\partial S} G.$$

La frontera ∂S consta de dos curvas que son

$$x^2 + y^2 = 3, \quad z = 1,$$

y

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, y + z = 4,$$

(véase la Figura 65) con parametrizaciones respectivas

$$(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta, 1), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$(\tfrac{1}{2}\cos\theta, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta, \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La integral de G sobre ∂S consta de estas dos contribuciones que

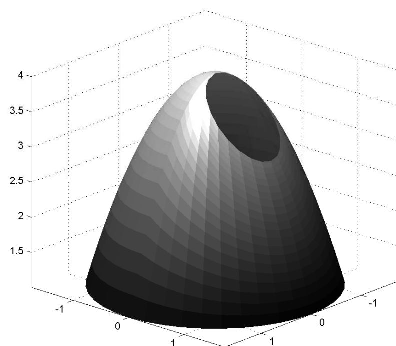


Figura 65. Gráfica del Ejercicio **875**

son

$$\int_0^{2\pi} \left(-4\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 6\cos^2\theta\right)\,d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \left((\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2(-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{1}{2}\cos^2\theta(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)\right)\,d\theta.$$

Después de unos cuantos cálculos con estos integrandos trigonométricos, teniendo presentes las fórmulas del ángulo doble, llegamos al resultado final -3π.

876 *Consideremos el campo vectorial $F(x,y,z)=(y,z,x)$, y la superficie S (porción de un toro), parametrizada por*

$$\Phi(u,v)=((2-\cos(u))\cos(v),(2-\cos(u))\operatorname{sen}(v),\operatorname{sen}(u)),$$

$u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\frac{3\pi}{2}]$. *Calcular* $\displaystyle\int_S F$ *orientada al exterior.*

Solución 876:

La superficie S es un toro al que se le ha quitado un trozo (véase la Figura 66). Si le añadimos las tapas S_1 y S_2, orientadas exteriormente, entonces tendremos una superficie cerrada, que encierra un volumen D a la que poder aplicar el teorema de Gauss. Así pues:

$$\int_S F+\int_{S_1} F+\int_{S_2} F=\iiint_D \operatorname{div} F\,dV$$

Como $\operatorname{div} F=0$, sólo habrá que calcular las integrales sobre S_1 y S_2.

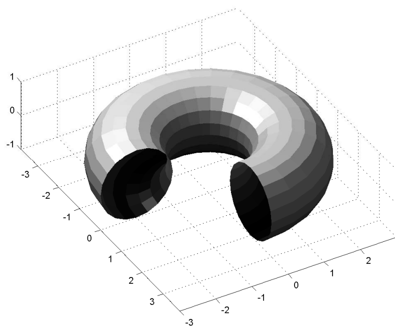


Figura 66. Ejercicio **876**: porción de toro

Parametrizamos S_1; se trata de un círculo situado en el plano $y=0$, (el correspondiente a $v=0$ en la parametrización de S) de centro $(2,0,0)$ y radio 1. Una parametrización es:

$$\phi_1(r,t)=((2-r\cos t),0,r\operatorname{sen} t),\quad r\in[0,1],\quad t\in[0,2\pi].$$

La normal unitaria exterior a S_1 es el vector $\mathbf{N}_1 = (0, -1, 0)$. Entonces,

$$\int_{S_1} F = \int_{S_1} F \cdot \mathbf{N}_1 = \int_{S_1} -z\, dS$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r \operatorname{sen} t \|\mathbf{n}_1(r,t)\|\, dr\, dt = 0.$$

Del mismo modo, S_2 es un círculo situado en el plano $x = 0$ (correspondiente a $v = \frac{3\pi}{2}$) de centro $(0, -2, 0)$ y radio 1, cuya parametrización viene dada por:

$$\phi_2(r,t) = (0, -(2 - r\cos t), r \operatorname{sen} t), \quad r \in [0,1], \quad t \in [0, 2\pi]$$

La normal exterior a S_2 es $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ y por tanto:

$$\int_{S_2} F = \int_{S_2} F \cdot \mathbf{N}_2 = \int_{S_2} y\, dS$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -(2 - r\cos t)\|\mathbf{n}_2(r,t)\|\, dr\, dt = -2\pi.$$

Conclusión: $\displaystyle\int_S F = 2\pi.$

877 *Sea* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3 = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 - z,\ 0 \leq z \leq 5\}$. *Si* $F(x,y,z) = (x, y, -2z)$, *calcular* $\displaystyle\int_S F$ *orientada al exterior:*

(a) *Directamente.*

(b) *Mediante el teorema de Gauss.*

(c) *Mediante el teorema de Stokes.*

Solución 877:

Dejamos al lector el cálculo directo de la integral. Obsérvese que el campo F tiene divergencia nula. Aunque la superficie S no es cerrada, puede añadírsele el disco

$$S' = \left\{x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 5\right\}$$

de modo que $S \cup S'$ encierra en su interior la región R (Figura 67). Por el teorema de la divergencia

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \int_S F + \int_{S'} F = \int_S F + \int_{S'} F \cdot \mathbf{N}.$$

Como S' es un trozo de plano, la normal unitaria exterior $\mathbf{N} =$

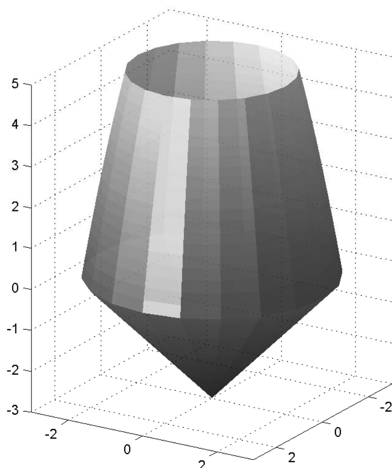


Figura 67. Superficie del Ejercicio **877**

$(0, 0, 1)$ y por tanto

$$\int_{S'} F \cdot \mathbf{N} = \int_{S'} (-2z) = -10\text{Area}(S') = -40\pi.$$

Por otro lado, debido de nuevo a que F tiene divergencia nula, podemos encontrar un campo G cuyo rotacional es F. Así, por el teorema de Stokes, tenemos

$$\int_S F = \int_S \nabla \times G = \int_{\partial S} G.$$

Un tal campo G es fácil de encontrar (cf. Ejercicio **874**), por ejemplo,

$$G = (0, -2xz, -xy).$$

Existen infinitas otras posibilidades igualmente válidas. La frontera ∂S consta de una sola curva $z = 5$, $x^2 + y^2 = 4$ con parametrización

$$(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 5), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La integral de G sobre ∂S es por tanto

$$\int_0^{2\pi} (-40\cos^2\theta)\, d\theta = -40\pi.$$

878 *Consideremos la superficie M en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones:*

$$z = x + y, \quad y^2 \le x, \quad x^2 \le 2y.$$

Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (z, x, y)$ definido en todo $\mathbb{R}^3$. Calcula el flujo de F a través de M orientado hacia el exterior,

(a) *Directamente.*

(b) *Mediante el teorema de Gauss.*

(c) *Mediante el teorema de Stokes.*

879 *Hallar el flujo del campo $F(x, y, z) = (z, x, y)$ a través de la superficie S dada por*

$$y = x^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le 1,$$

directamente y mediante el Teorema de Stokes.

880 *Denotemos por S el casquete de elipsoide*

$$\left\{2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1, 1 \le 2\sqrt{2}x \le 2\right\}$$

y $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$. Calcula la integral $I = \int_S F$ usando de algún modo:

(a) *El teorema de la divergencia.*

(b) *El teorema de Stokes.*

Solución 880:

En primer lugar observamos que el campo F tiene divergencia nula. Si completamos el casquete dado con las dos tapas correspondientes a $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (S_1) y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (S_2) tenemos una superficie cerrada que encierra una parte sólida del elipsoide R. Luego

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \int_S F + \int_{S_1} F + \int_{S_2} F.$$

Como estas dos últimas integrales tienen normales unitarias exteriores $(-1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente, sus integrales se calculan inmediatamente. En efecto

$$\int_{S_1} F = \int_{S_1} (-x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Area}(S_1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \pi \left(\sqrt{2} - \frac{5}{4}\right),$$

pues S_1 es el círculo en el plano $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $(y+1)^2 - z^2 \leq \sqrt{2} - \frac{5}{4}$. Del mismo modo,

$$\int_{S_2} F = \int_{S_2} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Area}(S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

con S_2 el círculo en el plano $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(y+1)^2 + z^2 \leq 2(\sqrt{2} - 1)$ Finalmente

$$\int_S F = \frac{\pi}{2} \left(\frac{11}{8}\sqrt{2} - 3\right).$$

Por otro lado, si G es un potencial vectorial para F, tendremos como en casos anteriores que

$$\int_S F = \int_{\partial S} G,$$

donde una elección ventajosa de G es $(yz, -xz, 0)$. La frontera ∂S consta de dos curvas que son

$$(y+1)^2 + z^2 = \sqrt{2} - \frac{5}{4}, \; x = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

y

$$(y+1)^2 + z^2 = 2(\sqrt{2} - 1), \; x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Los cálculos involucrados en resolver las integrales de G sobre estas dos curvas son estándar y se han realizado ya en algunas ocasiones. Dejamos al lector el comprobar que el resultado final coincide con el ya obtenido anteriormente.

881 *Sea S la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ cortada por el cono $z^2=4x^2+(2y-1)^2$, $z\geq 0$, orientada con la normal exterior, y el campo $F(x,y,z)=(0,0,1)$. Calcula el flujo de F a través de S directamente y mediante el teorema de Stokes.*

882 *Consideremos la superficie $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ y\geq z\geq 0\}$ y el campo vectorial $F(x,y,z)=(x,x,-z)$. Calcular el flujo de F a través de M, con orientación exterior:*

(a) Usando el Teorema de Gauss.

(b) Usando el Teorema de Stokes.

Solución 882:

(a) La superficie S es la pared cilíndrica limitada por $y\geq z\geq 0$, como puede verse en la Figura 68. Como no es una superfi-

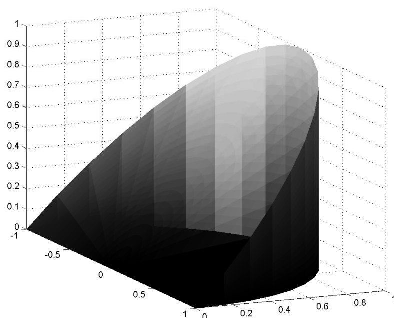


Figura 68. Cuña cilíndrica del Ejercicio **882**

cie cerrada necesitamos cerrarla para aplicar el Teorema de Gauss. Consideramos las superficies S_1 y S_2 correspondientes a las tapas (inferior y superior, respectivamente) que cierran S, y sea D el volumen encerrado por la unión de estas tres

superficies. Entonces, si suponemos orientación exterior en cada una de las superficies, el Teorema de Gauss afirma que:

$$\int_S F + \int_{S_1} F + \int_{S_2} F = \iiint_D \operatorname{div} F \, dV = 0,$$

pues $\operatorname{div} F = 0$, como se comprueba fácilmente.

Por tanto,

$$\int_S F = -\int_{S_1} F - \int_{S_2} F.$$

Puesto que S_1 es una superficie plana, para calcular $\int_{S_1} F \cdot dS$ usaremos $\int_{S_1} F \cdot \mathbf{N}_1$, donde $\mathbf{N}_1$ es la normal unitaria exterior a S_1. Dicho vector es $\mathbf{N}_1 = (0, 0, -1)$, y entonces,

$$\int_{S_1} (x, x, -z) \cdot (0, 0, -1) = \int_{S_1} z = 0 \quad \text{pues } z = 0 \text{ sobre } S_1.$$

Del mismo modo, puesto que S_2 está sobre el plano $y = z$, su normal unitaria exterior es $\mathbf{N}_2 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, luego

$$\int_{S_2} (x, x, -z) \cdot (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_2} (x + z).$$

Para calcular esta integral usamos una parametrización de S_2,

$$\phi(r, t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, r \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \pi], \ r \in [0, 1].$$

El vector normal asociado a la parametrización es $\mathbf{n}(r, t) = (0, -r, r)$ y su norma vale $\sqrt{2}r$. Por tanto,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_2} (x+z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{2} r^2 (\cos t + \operatorname{sen} t) \, dt \, dr = -\frac{2}{3}$$

Conclusión $\int_S F = \frac{2}{3}$.

(b) Para aplicar el Teorema de Stokes debemos tener en cuenta que $\operatorname{div} F = 0$ implica que existe G tal que $\nabla \times G = F$, luego

$$\int_S F = \int_S \nabla \times G = [\text{Stokes}] = \int_{\partial S} G.$$

Calculando un potencial vectorial para F obtenemos, entre otras muchas posibilidades $G = (xz, -xz, 0)$.

Parametrizamos ahora la frontera de S, para ello observamos que dicha frontera esta formada por las fronteras de S_1 y S_2. Para S_1 consideramos

$$\alpha_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \quad t \in [0, \pi],$$
$$\alpha_2(t) = (t, 0, 0), \quad t \in [-1, 1],$$

que, si la normal a S es exterior, está bien orientada. Para S_2 consideramos

$$\beta_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \pi],$$
$$\beta_2(t) = \alpha_2(t)$$

que está mal orientada.

Si calculamos la integral de línea de G sobre cada una de estas curvas obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1} G &= 0 \\ \int_{\alpha_2} G &= \int_{\beta_2} G = 0, \end{aligned}$$

y

$$\int_{\beta_1} G =$$
$$\int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t, -\cos t \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)\, dt$$
$$= -\int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 \operatorname{sen} t)\, dt = -\frac{2}{3}.$$

Por tanto,

$$\int_S F = \int_{\partial S} G = \int_{\alpha_1} G + \int_{\alpha_2} G - \int_{\beta_1} G - \int_{\beta_2} G = \frac{2}{3}.$$

883 *Considerar la superficie S definida por las ecuaciones*

$$S = \{z^2 = x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\},$$

y el campo vectorial $F(x, y, z) = (-x + 3, x^2, z)$. Calcular el flujo de F a través de S con orientación interior:

(a) Directamente.

(b) Usando el Teorema de Gauss,

(c) Usando el Teorema de Stokes.

Solución 883:

(a) Parametrizamos la superficie S por la función

$$\Phi(r, t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, r) \qquad r \in [0, 1], \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

El vector normal correspondiente a esta parametrización es

$$\mathbf{n}(r, t) = (-r \cos t, -r \operatorname{sen} t, r)$$

cuya orientación es interior. Entonces,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (-r \cos t + 3, r^2 \cos^2 t, r) \cdot \mathbf{n}(r, t)\, dr\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 \cos^2 t - 3r \cos t - r^3 \cos^2 t \operatorname{sen} t + r^2)\, dr\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1}{3} \cos^2 t - \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos^2 t \operatorname{sen} t + \frac{1}{3})\, dt = \frac{\pi}{2} - 3.$$

(b) Para usar el Teorema de Gauss debemos previamente cerrar la superficie. Para ello elegimos las superficies (véase la Figura 69)

$$S_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ z = 1\},$$
$$S_2 = \{y^2 \leq z,\ x = 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

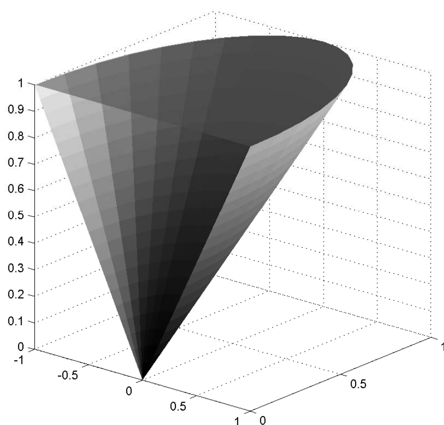


Figura 69. Volumen del Ejercicio **883**

Entonces, $S \cup S_1 \cup S_2 = \partial D$, con $D = \{z^2 \geq x^2 + y^2,\, x \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1\}$. Si consideramos las tres superficies orientadas exteriormente, resulta

$$\int_{S \cup S_1 \cup S_2} F = \iiint_D \operatorname{div} F \, dV = 0, \quad \text{pues } \operatorname{div} F = 0.$$

Luego

$$\int_S F = -\int_{S_1} F - \int_{S_2} F$$

Ahora bien,

$$\int_{S_1} F = \int_{S_1} (-x + 3, x^2, z) \cdot (0, 0, 1) = \int_{S_1} z = \text{Area}(S_1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{S_2} F = \int_{S_2} (-x + 3, x^2, z) \cdot (-1, 0, 0) = \int_{S_2} (x - 3)$$
$$= -3 \,\text{Area}(S_2) = -3$$

Por tanto, $\displaystyle\int_S F = \frac{\pi}{2} - 3$, con orientación interior.

(c) Para aplicar el Teorema de Stokes debemos previamente calcular un potencial vectorial, de manera que

$$\int_S F = \int_S \nabla \times G = \int_{\partial S} G.$$

Para calcular G resolvemos el sistema correspondiente, obteniendo, por ejemplo

$$G = (x^2 z, (x-3)z, 0).$$

La frontera de S se puede descomponer en tres partes

$$C_1 = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{bien orientada},$$
$$C_2 = (0, t, t) \quad t \in [0,1] \quad \text{mal orientada},$$
$$C_3 = (0, -t, t) \quad t \in [0,1] \quad \text{bien orientada}.$$

Entonces,

$$\int_{C_1} G = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t \cos^2 t + (\cos t - 3)\cos t)\, dt$$
$$= \left[\frac{\cos^3 t}{3} - 3 \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -6 + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{C_2} G = \int_0^1 -3t\, dt = -\frac{3}{2}$$

$$\int_{C_3} G = \int_0^1 3t\, dt = \frac{3}{2}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{\partial S} G = -6 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2} - 3.$

884 *Sea el campo vectorial $F(x,y,z) = (z,z,y)$ y la superficie S definida mediante las condiciones $x^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $0 \leq y \leq 1$, y dotada con la orientación normal exterior. Se pide calcular la integral de superficie $\int_S F$ de las siguientes formas:*

(a) Directamente.

(b) Empleando el Teorema de Stokes.

Soluciones del Capítulo 1

Sección 1.1

Repaso de geometría del plano y el espacio

1 No.

3 Sí.

5 $y = x + 8$.

6 $4y = 5x - 7$.

8 $2x + 3y = -5$.

9 No.

11 Sí.

12 Sí.

14 $x = -1 - 4t$, $y = 5 + 9t$, $z = 2 + t$.

15 $x = t$, $y = 1 - t$, $z = t$.

16 $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 3 - t$.

17 $(x, y, z) = (0, 1, 6) + t(-1, \sqrt{2}, -8)$.

18 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 2, 3)$.

19 $(x, y, z) = (\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, 0) + t(-1, 23, 5)$.

20 $x - y + 3z + 1 = 0$.

21 $x - 5z = -33$.

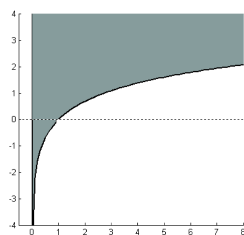
22 $x = 2$.

23 $2y + 3z = 23$.
24 $3x + 2y + 6z = 4$.
26 $P = (0, 0, 3)$, $\mathbf{n} = (3, 0, 1)$.
27 $P = (5, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$.
28 $P = (0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.
29 $P = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$.
30 $2x + y + 2z = 7$.
31 $y + z = 1$.
33 $x - y + 2 = 0$.
34 $30x + y - 23z + 86 = 0$.
36 $(0, 0, 1)$.
37 $(3, -2, -1)$.
38 $(0, 1, 3)$.
39 $(-2, 1, 5)$,
41 $(1, 4, -17)$.
42 $z = 3$.
43 $x = -1$.
46 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
47 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, paralelo al eje Z.
49 $(0, 0, 0)$, paralelo al eje X.
50 Paralelos.
51 Perpendiculares.
52 $\frac{8}{\sqrt{35}}$.
55 Véase la Figura 70(a).
56 Véase la Figura 70(b).
58 Exterior de la circunferencia unidad, incluida la frontera.
60 Véase Ejercicio **61**.
62 Cilindro de eje X y radio 2.
63 Grafo de la función $y = \frac{1}{x}$
65 Véase la Figura 70(c).

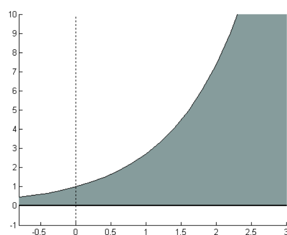
Sección 1.2

Cónicas y cuádricas

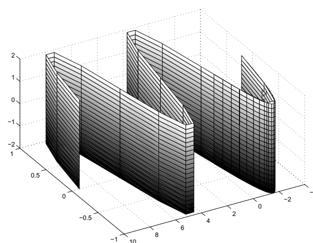
66 Elipse de centro $(0, 0)$, vértices $(\pm 6, 0)$ y $(\pm 2, 0)$. Focos en $(\pm\sqrt{32}, 0)$.



(a) Ejercicio **55**



(b) Ejercicio **56**



(c) Ejercicio **65**

Figura 70. Grafos de funciones

67 Circunferencia $(x-1)^2+y^2=1$ de centro $(1,0)$ y radio 1.

70 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $3X^2+Y^2=8$) con focos en $(\mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}})$.

71 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{6}$ (ecuación girada $\frac{16}{3}X^2+3Y^2=48$) con focos en $(\mp\frac{\sqrt{5}}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$.

72 Hipérbola de centro $(0,0)$, vértices $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ y focos en $(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$.

73 Hipérbola de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $X^2-Y^2=4$), vértices $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ y focos en $(\pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{8})$.

74 Parábola $\frac{1}{6}(x+1)^2=(y+3)$ de vértice $(-1,-3)$, foco $(-1,-\frac{3}{2})$ y directriz $y=-\frac{9}{2}$.

75 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $X^2+3Y^2=4$) con focos $(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$.

76 Dos rectas que se cortan en el origen con ángulo α, tal que $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ (ecuación girada $-7X^2+18Y^2=0$).

78 $x^2=16y$.

79 $y^2=14(x-\frac{1}{2})$.

81 $4(y+1)=x^2$.

82 Focos $(0,\pm\frac{6}{5})$; parábolas $y=\pm\frac{5}{24}x^2$.

84 Véase el Ejercicio **85**.

86 Véase el Ejercicio **85**.

87 Usar **86** y que la ecuación de la tangente a una hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en (x_0,y_0) es $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$. Puntos de corte $(\pm\sqrt{8},\pm 2)$.

88 Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x$ y la tangente viene dada en el Ejercicio **87**; basta intersecar ambas rectas y comprobar lo pedido.

89 Para la parábola $y=4cx$, su foco es $F=(c,0)$, su directriz $x=-c$ y la tangente viene dada en el Ejercicio **85**. Con estos datos $Q=(-c,\frac{2c}{y_0}(x_0-c))$. Finalmente comprobar que $FP\cdot FQ=0$.

90 Si situamos la parábola con vértice en el origen y eje Y, el foco se sitúa en el punto $(0,\frac{1}{20})$.

91 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$, $(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}})$.

92 Elipsoide de centro el origen (véase Figura 71(a)).

93 Hiperboloide de dos hojas con secciones elípticas perpendiculares al eje Z; (véase Figura 71(b))

94 Hiperboloide de una hoja de revolución respecto del eje Y (véase Figura 71(c)).

95 Paraboloide elíptico de eje Z (véase Figura 71(d)).

96 Dos planos que se cortan en el eje Y.

97 Cilindro elíptico paralelo al eje Z.

98 Paraboloide de revolución de eje Z y vértice en $(0,0,-4)$.

99 Paraboloide hiperbólico de centro el origen.

100 Elipsoide de centro $(0,-1,-1)$ y ecuación $x^2+2(y+1)^2+(z+1)^2=3$.

101 Hiperboloide de una hoja de centro $(-2,1,0)$ y ecuación $(x+2)^2+2(y-1)^2-z^2=6$.

102 Elipsoide de centro $(1,0,0)$ y ecuación $(x-1)^2+4y^2+z^2=1$.

103 Hiperboloide de dos hojas de centro $(-1,0,-4)$, eje Y, con ecuación $4(x+1)^2-y^2+(z+4)^2=-4$.

104 Cono de vértice $(0,1,1)$, con eje paralelo a Z de ecuación $9x^2+(y-1)^2-(z-1)^2=0$.

105 Cilindro hiperbólico paralelo al eje X (la hipérbola está girada $\frac{\pi}{4}$).

107 Hiperboloide de dos hojas de centro $(-1,-\frac{3}{2},-1)$, de eje paralelo a Z y ecuación $2(x+1)^2+3(y+\frac{3}{2})^2-4(z+1)^2=-\frac{21}{4}$.

109 Hiperboloide de una hoja de centro $(-2,3,-1)$ y secciones elípticas perpendiculares al eje Z de ecuación $(x+2)^2+(y-3)^2-4(z+1)^2=22$.

110 $x^2+y^2=1$.

112 $x^2+y^2=2y$.

113 $x^2+z^2=1$.

Sección 1.3

Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

114 $(3,\frac{\pi}{2})$.

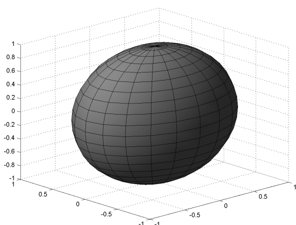
115 $(2,\frac{\pi}{6})$.

117 $(\sqrt{8},\frac{5\pi}{4})$.

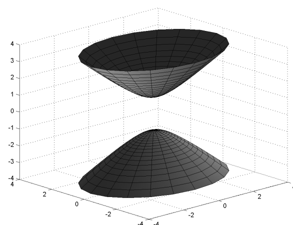
118 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

119 $(1,\sqrt{3})$.

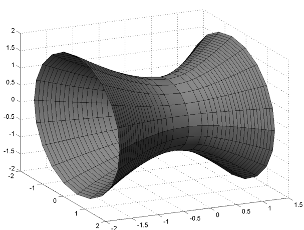
120 $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.



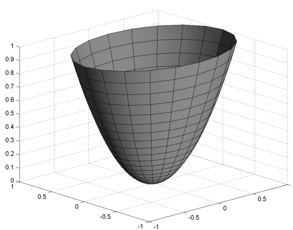
(a) Elipsoide



(b) Hiperboloide de dos hojas



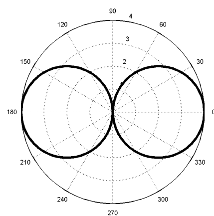
(c) Hiperboloide de una hoja



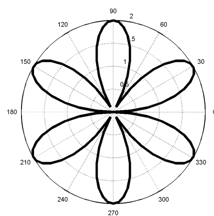
(d) Paraboloide elíptico

Figura 71. Cuádricas

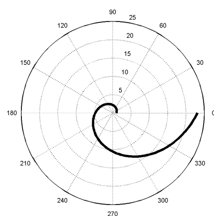
122 $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 0)$.
124 $(6, 0, -2)$.
125 $(2, \frac{\pi}{4}, 1)$.
126 $(6, \frac{\pi}{2}, -2)$.
127 $(1, \pi, 3)$.
128 $(0, 1, 0)$.
129 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$.
130 $(0, 0, 6)$.
131 $(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 8)$.
133 $(-2, 0, 3)$.
134 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.
135 $(2, 0, \pi)$.
137 $(\sqrt{2}, 0, \frac{\pi}{4})$.
138 $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$.
140 $(0, 1, 0)$.
141 $(0, 0, 2)$.
142 $r = 5$.
144 $r^2 \cos 2\theta = 1$.
145 $r \operatorname{sen}^2 \theta = \cos \theta$.
146 $r^2 \operatorname{sen}(2\theta) = 2$.
147 $r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) = 4$.
148 $x^2 + y^2 = 9$.
149 $y = -x$, $y \geq 0$.
151 $x = 3$.
152 No hay intersección.
154–164 Se muestran las curvas en las Figuras 72 y 73.
165 $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$ es un hiperboloide de una hoja de revolución respecto del eje Z (véase la Figura 74).
166 $r^2 + z^2 = 1$.
167 $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$.
168–170 Véase la Figura 75
171 Meridiano de la esfera unidad.
172 $\{0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta},\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.
173 $\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}\} \cup \{\pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$.
174 (cilíndricas) $z = r \cos \theta$; (esféricas) $\tan \phi \cos \theta = 1$.
175 $z = r$.



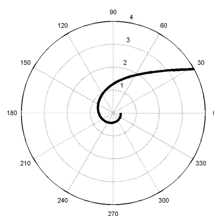
(a) **154**



(b) **158**



(c) **159**



(d) **160**

Figura 72. Curvas en polares.

176 $z = r^2$.

178 $\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

179 $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$.

180 $\{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 1\}$.

181 $\{\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi),\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\} \cup \{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta},\ 0 \leq z \leq 1 - r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\}$.

182 $\{\phi = \arctan\left(\frac{r}{h}\right);\ 0 \leq \rho \leq \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}},\}$.

183 (cilíndricas) $z = r^2 \cos 2\theta$; (esféricas) $\rho \operatorname{sen}\phi \tan\phi \cos 2\theta = 1$.

184 Esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2ar\cos\theta$. Esfera de centro $(0, a, 0)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2ar\operatorname{sen}\theta$. Esfera de centro $(0, 0, a)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2az$.

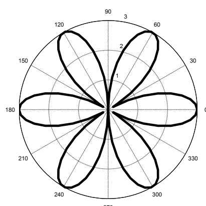
185 En polares: $r =$ constante es una circunferencia de centro el origen y radio r; $\theta =$ constante es una semirrecta de origen O y ángulo θ respecto del eje X.

En cilíndricas: $r =$ constante es un cilindro de radio r y eje Z; $\theta =$ constante es un semiplano limitado por el eje Z y ángulo θ respecto de eje X; $z =$ constante es un plano de altura z.

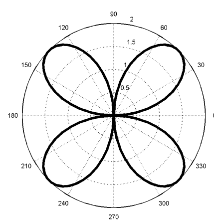
En esféricas: $\rho =$ constante es una esfera de centro el origen y radio ρ; $\theta =$ constante es lo mismo que en cilíndricas; $\phi =$ constante es un semicono de vértice el origen y eje Z, con ángulo ϕ respecto del eje Z.

186 Corresponde a una dilatación de centro el origen y razón 2 respecto de la original.

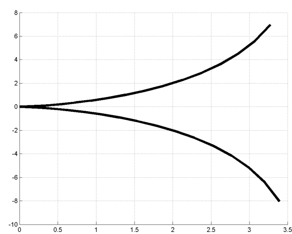
187 Basta usar el cambio de coordenadas de cartesianas a esféricas (cf. Ejercicio **136**) y comprobar que $g(x, y, z) = f(\rho, \phi)$ satisface que para cada z, la función g depende sólo de la distancia del punto (x, y, z) al $(0, 0, z)$. (véase también los Ejercicios **241**–**246**)



(a) **161**



(b) **162**



(c) **163**

Figura 73. Curvas en polares

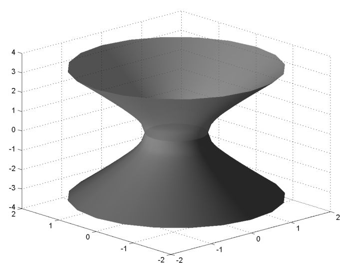
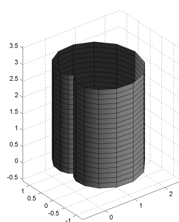
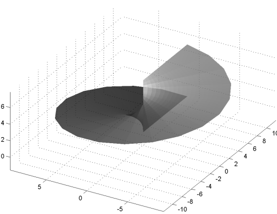


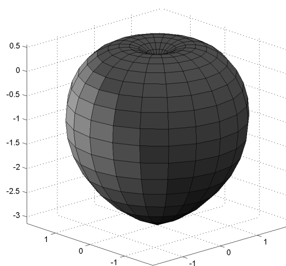
Figura 74. Ejercicio **165**: hiperboloide de una hoja



(a) **168** Cilindro cardioideo



(b) **169** Hélice



(c) **170** Cardioide de revolución

Figura 75. Superficies en cilíndricas y esféricas

Soluciones del Capítulo 2

Sección 2.1

Funciones de varias variables

189 $\mathbb{R}^2 - \{x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

191 $(\{x > 0\} \cap \{x + y \neq 0\}) - \{x = 1\}$.

192 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

194 $[0,2] \times [0,+\infty) \cup [-2,0] \times (-\infty,0]$.

195 $\{x + y > 0\}$.

196 $\{y > 0\}$.

199 $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

200 $\mathbb{R} \times [-1,1]$.

201 $\{x > 0,\ y > 0\}$.

203 $\mathbb{R}^2 - \{x^2 + y^2 = 1\}$ (todo el plano excepto la circunferencia unidad).

204 $\mathbb{R}^3 - \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (todo el espacio menos la superficie de la esfera unidad).

205 $\mathbb{R}^3 - \{x^2 - 4y^2 = 1\}$ (todo el espacio menos el cilindro hiperbólico $x^2 - 4y^2 = 1$).

207 $\mathbb{R}^2 - (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$ (todo el plano excepto los ejes coordenados).

206 $\{(x-1)^2+y^2 \geq 4\}$ (exterior del círculo de centro $(1,0)$ y radio 2).

208 $\{x^2+\frac{y^2}{4} \geq 1\} \cap \{y > x^2\}$ (exterior de la elipse $x^2+\frac{y^2}{4} \geq 1$ que queda dentro de la parábola $y = x^2$).

209 $f(1,0) = 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 2$; $\{f(x,y) = 0\} = \{(0,0)\}$; $f(\{x^2+y^2 \leq 4\}) = \{z = x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq 4\}$ (paraboloide circular de vértice el origen limitado por el plano $z = 4$).

210 $f(0,0,0) = 1$, $f(\pm 1, \pm 1, \pm 1) = e^{-3}$; $f(\{x^2+y^2+z^2 = 1\}) = e^{-1}$; $f(x,y,z) \to 0$ si $\|(x,y,z)\| \to \infty$.

211 Grafos de funciones de la forma $y = |x| - k$.

212 Curvas de la forma $x = |y| + k$.

214 Para $k = 0$ el eje Y; en otro caso circunferencias de centro $(\frac{1}{k}, 0)$ y radio $\frac{1}{k}$.

215 Para $k = 0$ el eje X; en otro caso circunferencias de centro $(0, \frac{1}{k})$ y radio $\frac{1}{k}$.

217 Para $k = 0$ par de rectas $x = 1$, $y = 2$; para $k \neq 0$ hipérbolas de centro $(1,2)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$ (ecuación reducida $(X-\frac{3\sqrt{2}}{2})^2-(Y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2k$).

218 Para $k = 0$ el origen; para $k > 0$ elipses de centro el origen y ejes paralelos a los coordenados; $\emptyset$ en otro caso.

219 Para $k = 0$ los ejes coordenados; para $k \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dos rectas que se cortan en el origen; para $k = \frac{1}{2}$ la recta $y = x$ y para $k = -\frac{1}{2}$ la recta $y = -x$; $\emptyset$ en otro caso (ecuación reducida $(k-\frac{1}{2})X^2 + (k+\frac{1}{2})Y^2 = 0$).

220 Para $k = 1$ el eje X; para $k = -1$ el eje Y; para $k < -1$ ó $k > 1$ dos rectas que se cortan en el origen; $\emptyset$ en otro caso (ecuación reducida $(1-k)X^2 + (1+k)Y^2 = 0$).

221 Para $k > 0$ esferas de centro el origen y radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$; $\emptyset$ en otro caso.

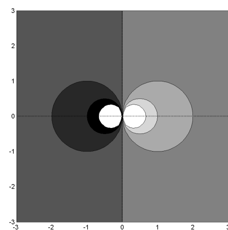
222 Parábolas de vértice $(k,0)$ y eje X, $y^2 = -(x-k)$.

223 Para $k = 0$ los ejes coordenados; en otro caso, la parte positiva de la función $y = \frac{k^2}{x^2}$.

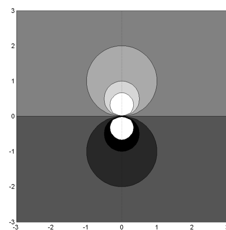
224 Para $k \leq 0$, $\emptyset$; para $k > 0$ grafo de funciones $y = \frac{\log k}{x}$.

226 Rectas $y = kx$.

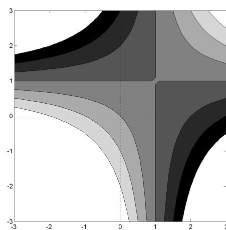
228 (a) Son circunferencias de centro el origen y radio $\frac{-1}{\log \alpha}$ (véase la Figura 78(a)).
(b) No existen curvas de nivel.
(c) Grafo de la función $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.



(a) Ejercicio **214**

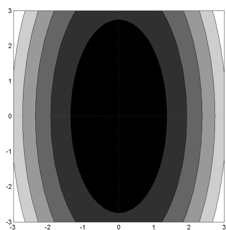


(b) Ejercicio **215**

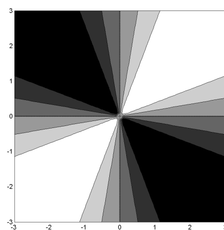


(c) Ejercicio **217**

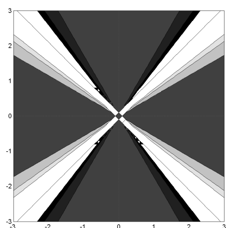
Figura 76. Curvas de nivel



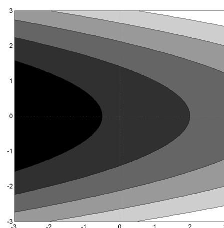
(a) Ejercicio **218**



(b) Ejercicio **219**



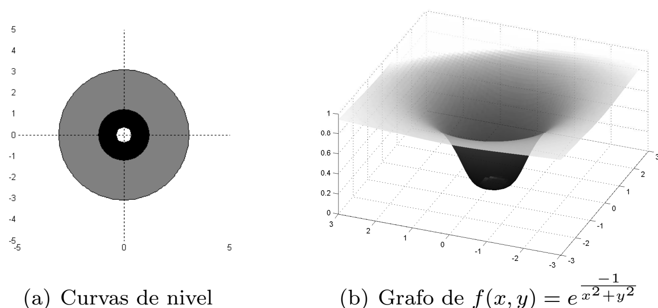
(c) Ejercicio **220**



(d) Ejercicio **222**

Figura 77. Curvas de nivel

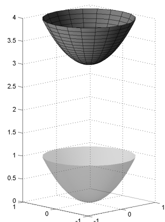
(d) Para el plano $y = cx$ la sección es la curva $e^{-\frac{1}{x^2(1+c^2)}}$.
(e) Véase la Figura 78(b).



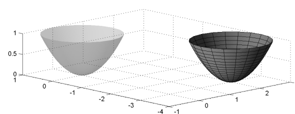
(a) Curvas de nivel (b) Grafo de $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$

Figura 78. Ejercicio **228**

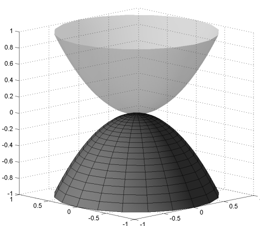
229 $f(x,y) = y - \operatorname{sen} x + 1$.
230 $f(x,y) = y - \sqrt{x^6 + \log^6 x} - 7$.
231 $f(x,y) = y^4x + x^3y + 121$.
232 $f(x,y) = 0$ si $x^2 + y^2 < 1$, $f(x,y) = 1$, en caso contrario.
233 El dominio es el mismo. El grafo corresponde al original, desplazado en la dirección del vector $(0,0,k)$.
234 Dominio $\{(x_0,y_0) + U\}$. Grafo desplazado en la dirección del vector $(x_0,y_0,0)$.
235 Dominio $\{(x,y) : (-x,-y) \in U\}$. Rotación de eje Z y ángulo π.
236 Mismo dominio. Simetría respecto del plano $z = 0$.
237–240 Véase la Figura 79.
247 $x = 2y^2 + 2z^2$.
248 $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.
249 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
250 $z^2(x^2 + y^2) = 1$.
251 $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
252 $4x^2 = y^2 + z^2$.
253–264 Véanse las Figuras 80, 81 y 82 .
265 Planos $x + y + z = c$.
266 Para $c > 0$ esferas de centro el origen y radio $\sqrt{c}$; para $c = 0$ el origen; $\emptyset$ en otro caso.



(a) Ejercicio **237**

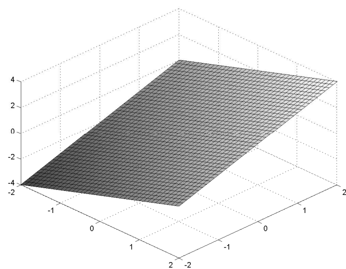


(b) Ejercicio **238**

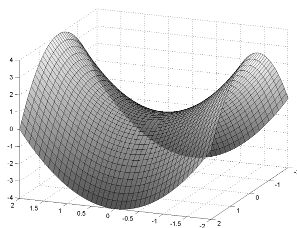


(c) Ejercicio **240**

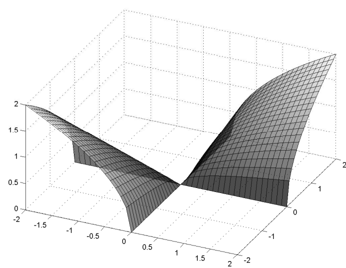
Figura 79. Ejercicios **237–240**



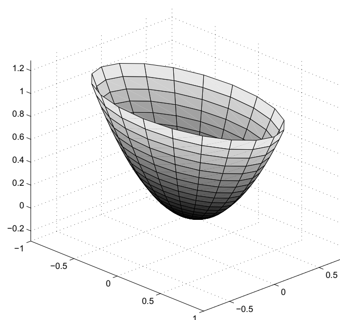
(a) **253**



(b) **254**

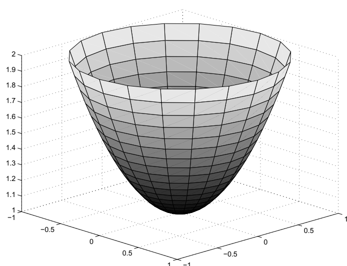


(c) **255**

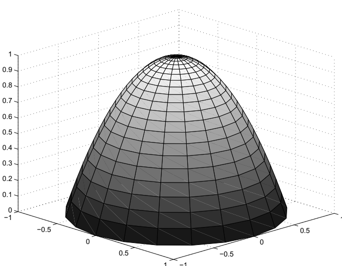


(d) **256**

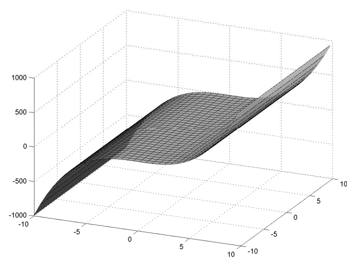
Figura 80. Grafos de funciones



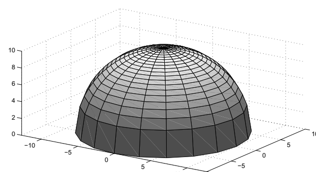
(a) **257**



(b) **258**

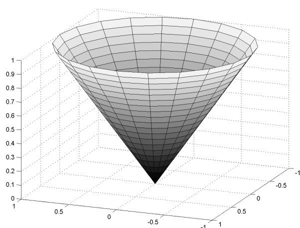


(c) **259**

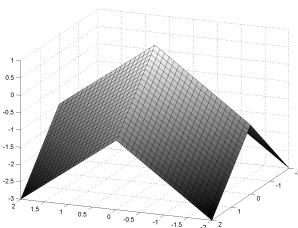


(d) **260**

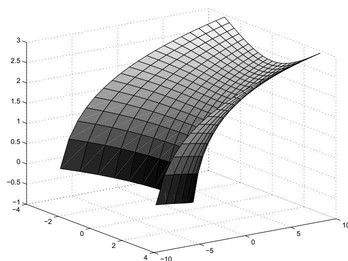
Figura 81. Grafos de funciones.



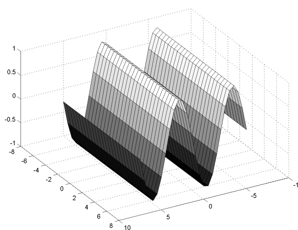
(a) **261**



(b) **262**



(c) **263**



(d) **264**

Figura 82. Grafos de funciones.

267 Para $c > 0$ hiperboloides circulares de una hoja de eje Z; para $c = 0$ cono circular recto; para $c < 0$ hiperboloides circulares de dos hojas de eje Z.

268 Paraboloides circulares de eje X y vértice en $(c, 0, 0)$; $x - c = -(y^2 + z^2)$.

Sección 2.2

Límites y continuidad

269 0.
270 1.
272 1 (polares).
273 $\nexists$ (iterados distintos).
274 $\nexists$ (iterados distintos).
276 $\nexists$ (direcciones $y = x^2$, $x = 0$).
277 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).
278 0 (polares).
279 1 (polares).
280 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).
281 e (polares).
282 $\nexists$ (direcciones $y = x^\alpha$ con $\alpha = \frac{2}{3}$).
283 $\nexists$ (direcciones $y = x^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{2}$).
284 0 (polares).
285 0 (usar Ejercicio **279**).
286 $\nexists$ (existe un unidimensional pero no el reiterado).
287 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).
288 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).
290 0 (dividir por $x + y^2$).
291 0 (polares).
292 ∞.
294 0 (polares).
297 $\nexists$ (direcciones $y = z = 0$, $x = z = 0$).
298 $\nexists$ (direcciones $y = z = x$, $y = z = -x$).
299 0 (usar coordenadas esféricas).
300 $\{2x + 3y > 0\}$.
301 $\{x^4 - y^4 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

302 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

303 $\mathbb{R}^2$.

305 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

306 $\mathbb{R}^2 - \{4x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$.

307 $\mathbb{R}^2 - (\{x = 0\}) \cup \{(0,1)\}$.

308 $\mathbb{R}^2 - (\{x < -2\} \cup \{(0,0)\})$.

310 Sí, definiendo $f(0,0) = 0$.

311 Aplicar la definición de continuidad de f para $y = y_0$.

Sección 2.3

Derivadas parciales

312 $f_x = (1 + 2x^2)e^{x^2+y^2}$, $f_y = 2xye^{x^2+y^2}$.

313 $f_x = -\frac{y}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(y\sqrt{x}) \operatorname{sen}(x\sqrt{y}) + \sqrt{y} \cos(y\sqrt{x}) \cos(x\sqrt{y})$, $f_y = -\sqrt{x} \operatorname{sen}(y\sqrt{x}) \operatorname{sen}(x\sqrt{y}) + \frac{x}{2\sqrt{y}} \cos(y\sqrt{x}) \cos(x\sqrt{y})$.

314 $f_x = 14x + \tan x$, $f_y = \tan y$.

315 $f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = -\frac{x}{y^2}$.

316 $f_x = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$, $f_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$.

317 $f_x(\frac{2\pi}{b}, 0) = ae^{\frac{2\pi a}{b}}$, $f_y(\frac{2\pi}{b}, 0) = 0$.

318 $f_x(c, \frac{c}{2}) = 2^c c^{\frac{3c}{2}} - \left(4 + \frac{c^3}{4}\right)^c \log\left(4 + \frac{c^3}{4}\right)$, $f_y(c, \frac{c}{2}) = 2^c c^{\frac{3c}{2}} \log(4c^3) - \frac{\left(4+\frac{c^3}{4}\right)^c c^3}{4+\frac{c^3}{4}}$.

319 $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 1$.

320 $f_x(-1,2) = -\frac{3}{49}$, $f_y(-1,2) = -\frac{12}{49}$.

321 $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_x(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_y(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

322 $f_x = yg(xy) - g(x)$, $f_y = xg(xy)$.

323 $f_x = g(y^x)y^x \ln y - g(x^y)yx^{y-1}$, $f_y = g(y^x)xy^{x-1} - g(x^y)x^y \ln x$.

325 (a) $\{y > x\}$; (b) $\{y < x\}$; (c) $\{y = x\}$; (d) $f_x = -g(x)$, $f_y = g(y)$; (e) $\{f > 0\} = \{|y| > |x|\}$, $\{f < 0\} = \{|y| < |x|\}$, $\{f = 0\} = \{|y| = |x|\}$.

326 $f_x = ye^{xy}$; $f_y = xe^{xy}$.

329

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2+z^2)^{1/3})$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2z}{3(x^2+y^2+z^2)^{2/3}} = \infty$$

(observar la dirección $x = y = 0$).

330 $\nabla f = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

331

$$\nabla f = \left(e^{xy^3+3}(1+xy^3), 3x^2y^2e^{xy^3+3}\right).$$

332

$$\nabla f = e^{-z^2-x-y}\left((1-x-y-z),(1-x-y-z),(1-2z(x+y+z))\right).$$

333 $\nabla f = \left(\frac{yz(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xz(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xy(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$.

334 -5.

335 $\frac{2}{e\sqrt{5}}$.

336 0.

337 $-\frac{6}{\sqrt{10}}$.

338 $\frac{2(A+C)ab+2B(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

339 $\frac{4e}{\sqrt{3}}$.

340 $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

342 $(3,1,-1)$.

344 En la dirección del vector gradiente: $\nabla h(1,0) = (-4e^{-1}, 0)$

345 Nos lo da el vector $\nabla f(a,b) = (2a^3, 2b^3)$.

346 $(\sqrt{2}, -1)$.

347 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$.

348 $(2e, 4e)$.

349 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

350 $4x + y = 3$.

351 $3x + y = 5$.

352 $x + 4y = 2$.

353 $(\frac{5}{8} + \frac{\pi}{4})(x-2) = (\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4})(\frac{1}{2} - y)$.

356 En $(1,0)$: $z = \frac{1}{2}y$; en $(0,1)$: $z = x$; en $(-1,1)$: $z = -\frac{1}{2}y$; en $(0,0)$: $z = 0$.

Vectores normales: en $(1,0)$: $(0,\frac{1}{2},-1)$; en $(0,1)$: $(1,0,-1)$; en $(-1,1)$: $(0,\frac{1}{2},1)$; en $(0,0)$: $(0,0,1)$.

357 En $(-\pi,0)$: $z=-2\pi x-\pi^2$; en $(0,\pi)$: $z=\pi^3 x$.
Vectores normales: en $(-\pi,0)$: $(2\pi,0,1)$; en $(0,\pi)$: $(\pi^3,0,-1)$.

358 $z=1$.
Vector normal: $(0,0,1)$.

359 $z=x-y+2$.
Vector normal: $(1,-1,-1)$.

360 $z=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y$.
Vector normal: $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1)$.

361 $z=2x+2y$.
Vector normal: $(2,2,-1)$.

362 $z=x+ay-1$.
Vector normal: $(1,a,-1)$.

363 $z=2x-4y-3$.
Vector normal: $(2,-4,1)$.

365 Ambas tiene el mismo plano tangente en $(0,0)$, $z=0$.

366 $(-1,0,-1)$.

367 $(0,4,-1)\times(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)=(0,0,0)$; punto: $(0,-2,5)$.

368 $(\frac{9}{4},1,\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(-\frac{9}{4},-1,-\frac{\sqrt{3}}{4})$.

370 El plano tangente es

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

Por tanto

$$a+b+c=x_0+y_0+z_0+2(\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{x_0z_0}+\sqrt{y_0z_0})=1.$$

371 No tiene plano tangente pues la sección $x=y$ corresponde a la curva $|x|$, que no tiene tangente en $x=0$.

373 $DF=(4x^3,-4y^3)$.

374 $DF=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

375 $DF=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$.

377 Es continua pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0$ (usar polares desplazadas $x = r\cos\theta$, $y = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$).
$f_x(0,1) = 1$, $f_y(0,1) = -1$, pero no es diferenciable (según la definición).

378 Es continua en todo $\mathbb{R}^2$, pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (usar polares).
$f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. No es diferenciable en $(0,0)$ (usar la definición). Diferenciable en el resto.

379 (a)

$$D_{\mathbf{n}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 n_1^2\,\mathrm{sen}(tn_2) + t^2 n_2^2\,\mathrm{sen}(tn_1)}{t^3(n_1^2 + n_2^2)} = n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2;$$

(b) $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$;
(c) No puede ser diferenciable pues si lo fuera $D_{\mathbf{n}}f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\mathbf{n} = 0$, $\forall\mathbf{n}$, que contradice lo obtenido en el primer apartado.

380 Si $n_1 + n_2 \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(0,0) = \frac{n_1^2+n_2^2}{n_1+n_2}$; en caso contrario no existe la derivada direccional. f no puede se diferenciable en $(0,0)$ porque no posee derivadas direccionales en todo vector. Es continua en $(0,0)$ (usar polares).

382 Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x = \frac{2y^6 - 2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}, \quad f_y = \frac{4xy(x^2+y^4) - 8xy^5}{(x^2+y^4)^2};$$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
f no es continua en $(0,0)$ (usar las direcciones $y = x^\alpha$), por tanto no puede ser diferenciable.

383 Diferenciable si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_y = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. No diferenciable en $(0,0)$ (usar la definición);

385 Diferenciable si $y \neq 0$: $f_x = \frac{2x}{y}$, $f_y = -\frac{x^2}{y^2}$. $f_x(x_0,0) = 0$ pero $\nexists f_y(x_0,0)$ para $x_0 \neq 0$; $f_y(0,0) = 0$. Luego no es diferenciable si $y = 0$, $x_0 \neq 0$. En $(0,0)$ no es diferenciable según la definición.

386 Diferenciable si $x \neq y$,

$$f_x = \frac{e^{x^2-y^2-1}(2x(x-y)-1)}{(x-y)^2}, \quad f_y = \frac{e^{x^2-y^2-1}(1-2y(x-y))}{(x-y)^2};$$

en el resto no es diferenciable porque no es continua.

SECCIÓN 2.4

Regla de la cadena y derivadas de orden superior

387

$$(f\circ c)'(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t),$$
$$D(c\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ -y\operatorname{sen}(xy) & -x\operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix}$$

388

$$(f\circ c)'(t) = 15t^4e^{3t^5}, \quad D(c\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6ye^{2xy} & 6xe^{2xy} \\ 3ye^{3xy} & 3xe^{3xy} \end{pmatrix}$$

389

$$(f\circ c)'(t) = (1+4t^2)e^{2t^2},$$
$$D(c\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2x^2)e^{x^2+y^2} & 2xye^{x^2+y^2} \\ -(1+2x^2)e^{x^2+y^2} & -2xye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

390 No en general. Sólo es cierta si $g' \equiv 0$, es decir, si $g =$cte.

392 $f_{xx} = g''(x-ct) + h''(x+ct)$; $f_{tt} = c^2(g''(x-ct) + h''(x+ct))$.

393 $u_x = 2xy^2g(x^2y^2) - yg(y)$, $u_y = 2x^2yg(x^2y^2) - xg(y)$.

395 $g_\rho = f_x\cos\theta\operatorname{sen}\phi + f_y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + f_z\cos\phi$, $g_\theta = -f_x\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + f_y\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, $g_\phi = f_x\rho\cos\theta\cos\phi + f_y\rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi - f_z\theta\operatorname{sen}\phi$. En el caso particular, $g_\rho = 2\rho$, $g_\theta = 0$, $g_\phi = 0$.

396 $h_x(x,y) = f_{,1}(x,u(x,y)) + f_{,2}(x,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$.

397

$$h'(t) = f_{,1}(t,u(t),v(t)) + f_{,2}(t,u(t),v(t))u'(t) + f_{,3}(t,u(t),v(t))v'(t).$$

398

$$\begin{aligned} h_x(x,y) =& f_{,1}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) \\ &+ f_{,2}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &+ f_{,3}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))w'(x). \end{aligned}$$

399

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = g_{1,1}(h(x,xy,x^2),xy)(h,_1(x,xy,x^2) + h,_2(x,xy,x^2)y + h,_3(x,xy,x^2)2x) + g_{1,2}(h(x,xy,x^2),xy)y.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = g_{2,1}(\cos(x^2+y^2),\operatorname{sen}(x^2y))(-2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)) + g_{2,2}(\cos(x^2+y^2),\operatorname{sen}(x^2y))\cos(x^2y)x^2.$$

400

$$g_x = (f,_{11}(f(x,y),y) + f,_{22}(x,f(x,y)))f,_1(x,y) + f,_{21}(x,f(x,y));$$
$$g_y = (f,_{11}(f(x,y),y) + f,_{22}(x,f(x,y)))f,_2(x,y) + f,_{12}(f(x,y),y).$$

401 $\nabla g(x,y) = F'(f(x,y))\nabla f(x,y)$.
402 $h_1(x) = f(x,x) = x^x$, luego

$$h_1'(x) = f,_1(x,x) + f,_2(x,x) = x^x(1+\log x);$$

$h_2(x) = f(\sqrt{x},\sqrt{x}) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, luego

$$h_2'(x) = (f,_1(\sqrt{x},\sqrt{x}) + f,_2(\sqrt{x},\sqrt{x}))\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(1+\log\sqrt{x});$$

$h_3(x) = f(\operatorname{sen} x,\cos x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, luego

$$\begin{aligned} h_3'(x) =& f,_1(x,x)\cos x - f,_2(x,x)\operatorname{sen} x \\ =& (\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1}\cos^2 x + (\operatorname{sen} x)^{\cos x+1}\log(\operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

403 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$;

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

406 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x-y)}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yf'(x-y)+f(x-y)}{y^2}$.
407 $u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y = -u_{yy}$.
408 $\phi_{xx} = f''(x-t) + g''(x-t) = \phi_{tt}$.

409 $f_{xyz} = e^{xy} + xye^{xy} + 6xz^2 = f_{zyx}$;

410 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

411 $f_{xy} = 2x + 2y$, $f_{yz} = 2z$, $f_{zx} = 0$, $f_{zyz} = 0$.

412 $f_{xx} = 12x^2y^3 + y^4e^{-xy^2}$;
$f_{xy} = f_{yx} = 12x^3y^2 + e^{-xy^2}(2xy^3 - 2y)$;
$f_{yy} = 6x^4y + e^{-xy^2}(4x^2y^2 - 2x)$;

413

$$f_{xx} = \frac{-\operatorname{sen} x(\cos^4 x - 6\cos^2 x e^{-y} + e^{-2y} - 6\cos^2 x + 2e^{-y}) + 4\operatorname{sen} x \cos^2 x(1 + \operatorname{sen}^2 x + e^{-y})}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{e^{-y}\cos x(1 + e^{-y} + 3\operatorname{sen}^2 x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

$$f_{yy} = \frac{e^{-y}\operatorname{sen} x(e^{-y} - \cos^2 x)}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

414 $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial z^3}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial y} = 36x^2y^2$.

415 $u_{xx} = 6x = -u_{yy}$.

416 $u_{xx} = 0 = u_{yy}$.

417 $u_{xx} = 2 = -u_{yy}$.

418 $u_{xx} = -6y = -u_{yy}$.

419 $u_{xx} = -\operatorname{sen} x \cosh y = -u_{yy}$.

420 $u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y = -u_{yy}$.

422 $u_t = -(m^2 + n^2)ke^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$;
$u_{xx} = -m^2e^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$;
$u_{yy} = -n^2e^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$.

423 $u_x = \cos\theta U_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}U_\theta$, $u_y = \operatorname{sen}\theta U_r + \frac{\cos\theta}{r}U_\theta$. La ecuación en polares es $rU_r = 0$.

425 (a) $f_x = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;
(b) $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$;
(e) $f_y(x, 0) = 1$.

426 (a) $f_x = -\frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x})$, $f_y = -\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})$.
(b) $z_x = f_{,1}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + f_{,2}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$,
$z_y = f_{,1}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + f_{,2}(g(x,y), h(x,y))\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$;

427 1.

428 1.

429 3.
430 0.

Sección 2.5

Derivación implícita. Polinomio de Taylor

431 $\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$.
432 -1.
433 5.
434 0.
435 $7y + 6z = 13$.
436 $x + y + z = 0$.
437 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$.
438 $y''(1) = -\frac{2\pi(4\log^2 2+\pi^2)}{(\pi-\log 4)^3}$.
439 (a) $P_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(y-\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2)$. (b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-(x-\frac{\pi}{4}))$.
440 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{a^2}y^2$.
441 $1 + xy - \frac{1}{2}y^2$.
442 $ze + \frac{1}{2}exz - \frac{1}{2}eyz$.
443 $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + y^2$.
444 $P_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$; Luego $f(0{,}97, 0{,}05) = \frac{\pi}{4} - 0{,}04 \approx 0{,}745398$.
447 $F(x,y,z) = z^3y + zx^2 - 1$ verifica $F(1,0,1) = 0$, es diferenciable con continuidad en ese punto y $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 1$, luego el Teorema de la función implícita asegura la existencia de z como función implícita de x e y.
Las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -1$, luego el plano tangente es $2x + y + z = 3$.

Sección 2.6

Extremos

448 $(0,0)$ pto. de silla.
449 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ mínimo.

451 No hay extremos.

452 $\{(x, x)\}$ mínimos.

453 $(0, 0)$ pto. de silla; $(12, 72)$ mínimo.

454 $(0, 0)$ pto. de silla; $(1, 1)$ máximo.

456 $(0, 0, 0)$ mínimo.

457 $(0, 0)$ pto. de silla. $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$ mínimos.

458 $(0, 0)$ (degenerado); $(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{3}})$ pto. de silla.

460 $(0, 0)$, $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ (degenerados) ptos. de silla (observar la sección $y = 0$; $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$);

461 $(0, 0)$, (degenerado) pto. de silla (observar las sección $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x^2$);

462 $(0, 0)$ pto. de silla; $\{xy = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (degenerados): máximos si k es impar, mínimos si k es par; (observar que $\log(2) \leq \log(2 + \operatorname{sen}(xy)) \leq \log(3)$);

463 $\{(x, x)\}$ (degenerados) mínimos ($f(x, x) = 0 \leq (x - y)^2 = f(x, y)$);

464 $(0, 0)$ (degenerado) pto. de silla (observar la sección $x = 0$); $(-\frac{72}{43} + \frac{6\sqrt{15}}{43}, -\frac{15}{43} + \frac{12\sqrt{15}}{43})$ pto. de silla, $(-\frac{72}{43} - \frac{6\sqrt{15}}{43}, -\frac{15}{43} - \frac{12\sqrt{15}}{43})$ máximo;

465 $(0, 0)$ máximo; $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$, $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$ ptos. de silla; $(0, 1)$ (degenerado) mínimo (estudiar la función $g(t) = f((x_0, y_0) + t(n_1, n_2)))$;

466 $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ máximos; $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ mínimos; $(\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ (degenerado) ptos. de silla (estudiar la función $g(t) = f((x_0, y_0) + t(n_1, n_2)))$;

467 $x = 0$ (degenerados) ptos. de silla; $y = 0$ (degenerados) ptos. de silla; $(12, 8)$ mínimo;

469 No tiene extremos;

471 Función a minimizar $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 + 2y^2 + (y + 1)^2 + (y - 2)^2$. Mínimo en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

472 $k > \frac{25}{16}$.

473 Función $x^3y^5z^6 - x - y - z$; mínimo para $y = \frac{5}{3}x$, $z = 2x$.

474 Sistema de puntos críticos:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Para resolver usar la regla de Cramer.

475 La superficie es un compacto. Máximo: $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Mínimo: $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$;

478 Máximo: $(e, \frac{1}{e})$ (estudiar $f(x, \frac{1}{x})$);

479 Pto. de silla: $(0,0,0)$ (estudiar $f(0,y,y)$ y $f(0,y,-y)$);

481 $S(r,h) = 2\pi rh + \pi r^2$, $V = \pi r^2 h$. Mínimo en $r = h = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

482 $V = xyz$ sujeto a $x + y + z = 1$. Máximo en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

483 Función $x^2 + (y-1)^2$ sujeto a $x^2 = 4y$. Mínimo en $(0,0)$.

484 Función $\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$, sujeto a $y = x^2$ (se puede minimizar la función al cuadrado). El mínimo se alcanza en el punto de la parábola $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, la distancia es $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

486 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Mínimo en $(2 - \sqrt[3]{2}, 0, \sqrt[3]{2} - 1)$.

487 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Ptos. más cercanos al origen $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$.

488 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Puntos críticos:

$$(0,0,1), (0,0,-1), (0,1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (-1,0,0),$$
$$(0, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (0, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (0, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (0, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),$$
$$(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),$$
$$(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0), (\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0),$$
$$(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0), (\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}), (\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),$$
$$(\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}), (\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),$$
$$(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}), (-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}).$$

Los últimos ocho puntos son los más lejanos al origen.

489 Puntos críticos: $\{(0,0,3), \{x^2 + y^2 = \frac{5}{2}, z = \frac{1}{2}\}\}$.
Como $f|_{\{x^2+y^2+z=3\}} = 3 - z + z^2 \geq \frac{11}{4} = f|_{\{x^2+y^2+z=3\}}$, los puntos de $\{x^2 + y^2 = \frac{5}{2},\, z = \frac{1}{2}\}$ son mínimos.

491 Ptos. críticos: $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(4\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, \sqrt[4]{\frac{1}{5}}, 0)$ (máximo), $(-4\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, 0)$ (mínimo).

493 $V(x,y,z) = 8xyz$ sujeto a $x^2+y^2+z^2 = 1$.
Máximo en $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

Dimensiones: alto = ancho = largo = $2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

495 $a = \sqrt{2}$, $b = 4\sqrt{2}$.

497 Máximo de $f(x)$ es $a+b$, sujeto a $(a-2)^2+(b-2)^2 = 1$.
Ptos. críticos $(2+\sqrt{\frac{1}{2}}, 2+\sqrt{\frac{1}{2}})$, $(2-\sqrt{\frac{1}{2}}, 2-\sqrt{\frac{1}{2}})$; el primero es un máximo y el segundo el mínimo buscado (obsérvese que la restricción define un compacto).

498 Ptos. críticos:

$$(0,0,2),(0,0,-2),(0,2,0),(0,-2,0),(2,0,0),(-2,0,0),$$
$$(0,\sqrt{2},\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(\sqrt{2},0,\sqrt{2}),(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{2},0),$$
$$(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0),(\tfrac{2}{\sqrt{3}},\tfrac{2}{\sqrt{3}},\tfrac{2}{\sqrt{3}}),(-\tfrac{2}{\sqrt{3}},-\tfrac{2}{\sqrt{3}},-\tfrac{2}{\sqrt{3}}).$$

Máximos: $(0,0,2)$ $(0,2,0)$, $(2,0,0)$;
Mínimos: $(0,0,-2)$ $(0,-2,0)$, $(-2,0,0)$.

499 $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ (es un máximo pues el hessiano reducido es definido negativo).

500 Función $2x^2+y^2-\frac{x}{y}$ sujeto a $x+y = 96$; mínimo para $x = 36$, $y = 60$.

502] $(1,1,0)$ (es un mínimo pues el hessiano reducido es definido positivo).

503 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{19}{5})$.

504 Ptos. críticos en el interior: $(0,0)$, $(a^{4/5}, -a^{3/5})$.
En la frontera: $(1,-a^{1/3})$, $(-1,a^{1/3})$, $(a^{1/2},-1)$, $(-a^{1/2},-1)$.
Los vértices del cuadrado: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.
Máximo en $(1,1)$; mínimo en $(-1,a^{1/3})$.

506 Ptos. críticos en el interior: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$. El único que satisface las restricciones es $(-1,0)$;
En la frontera $x^2+y^2 = 4$: $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(2,0)$,
$\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$,
$\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$,

$\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$.
Los únicos que satisfacen la otra restricción son

$$\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right), \quad \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right), \quad (-2,0).$$

En la frontera $y = x + 1$: $(-1, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$.
Con las dos condiciones $(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2})$.
Máximo: $(0, 2)$; Mínimo: $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$.

507 Ptos. críticos en el interior: $(0, 0)$.
En el lado $(0, 0)$-$(1, 0)$: todo el segmento es de puntos críticos.
En el lado $(0, 0)$-$(0, 1)$: todo el segmento es de puntos críticos.
En el lado $(0, 1)$-$(1, 0)$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Máximo en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

509 (a) Ptos. críticos: $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ (nótese que $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ no verifica la condición $z \leq 1$).
(b) Ptos. críticos: $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$.
Puesto que M es un compacto, el máximo se alcanza en $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ y el mínimo en $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Soluciones del Capítulo 3

Sección 3.1

Integrales dobles

512 9.

513 $\frac{8}{3}$.

514 $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$.

515 $\frac{1}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3}) - \frac{2}{3}$.

519 $\frac{1}{40}$.

520 $\frac{7}{60}$.

522 $\frac{1}{3}$.

523 $2\pi + \pi^2$.

525 $\frac{e-2}{2}$.

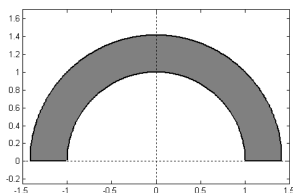
526 $-\frac{1}{18}$.

528

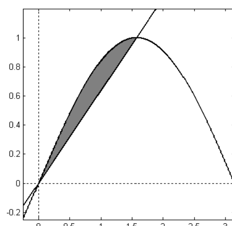
$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}(1+xy)\,dy\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(1+xy)\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}(1+xy)\,dy\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Véase la Figura 83(a)).

529 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2x}{\pi}}^{\operatorname{sen} x} y\, dy\, dx = \frac{\pi}{24}$. (Véase la Figura 83(b)).



(a) **528**



(b) **529**

Figura 83. Regiones de integración en el plano

532 $\int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} dx\, dy = \frac{16}{3}$.

533 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y\, dy\, dx = \frac{\pi}{2}$.

534 $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y)\, dy\, dx = \frac{11}{6}$.

536 $\int_0^2 \int_0^x \frac{xy}{2}\, dy\, dx = 1$.

539 $-\frac{16}{15}$; región entre las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2 - 2x^2$.

541 $\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{2}|x|}^{\sqrt{x^2+1}} xy^2\, dy\, dx = 0$.

543 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\, dy\, dx$.

544 $\int_0^1 \int_0^{\arccos r} \cos\theta\, d\theta\, dr$.

545 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} \frac{x + y}{\operatorname{sen} x}\, dx\, dy$.

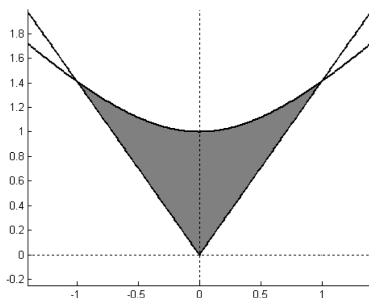


Figura 84. Gráfica del Ejercicio **541**

547 $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^1 (x+y^2)\,dy\,dx.$

548 $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy + \int_1^9 \int_{\frac{1}{2}(y-3)}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy = \frac{32}{3}.$

549 $\displaystyle\int_{-4}^0 \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} y\,dy\,dx + \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} y\,dy\,dx = 0.$

552 $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^4+1}\,dy\,dx = 0.$

554 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \frac{1}{3}(e-1).$

Sección 3.2

Integrales triples

556 $\frac{1}{3}$.

557 $\frac{15}{8}$.

558 18.

560 $\frac{1}{12}$; Tetraedro con base en el triángulo $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ limitado por el plano $z=y$.

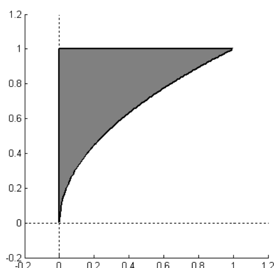


Figura 85. Región del Ejercicio **554**

562 $\frac{11}{9}$; Región limitada por el plano $z = 0$ y el paraboloide hiperbólico $z = xy$ que queda encima del triángulo $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$.

563 $\frac{7}{6}$; Región limitada por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda encima del triángulo $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$.

564 $\frac{52}{63} - \frac{12\sqrt{3}}{35}$;
Tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$.

566 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} (x + y + z)\, dz\, dy\, dx = \frac{5}{24}$.

567 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{1-x^2} xyz\, dz\, dy\, dz = 0$.

571 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} (1 - z^2)\, dz\, dy\, dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} (1 - z^2)\, dz\, dy\, dx = \frac{3}{10}$.

572

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f\, dz\, dx\, dy, \quad \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f\, dx\, dz\, dy,$$

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f\, dx\, dy\, dz, \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f\, dy\, dx\, dz,$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_z^x f\, dy\, dz\, dx.$$

573

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{2-x-y} f\,dz\,dx\,dy,$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{x} f\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_{2-2x}^{2-x} \int_0^{2-x-z} f\,dy\,dz\,dx,$$

$$\int_0^2 \int_0^{1-\frac{z}{2}} \int_0^{y} f\,dy\,dx\,dz + \int_0^1 \int_{1-\frac{z}{2}}^{1} \int_0^{2-x-z} f\,dy\,dx\,dz+$$
$$+\int_1^2 \int_{1-\frac{z}{2}}^{2-z} \int_0^{2-x-z} f\,dy\,dx\,dz,$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_y^{1} f\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_{1-y}^{2-2y} \int_y^{2-y-z} f\,dy\,dz\,dx,$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_y^{1} f\,dx\,dy\,dz + \int_0^1 \int_{1-z}^{1-\frac{z}{2}} \int_y^{2-y-z} f\,dx\,dy\,dz+$$
$$+\int_1^2 \int_0^{1-\frac{z}{2}} \int_y^{2-y-z} f\,dx\,dy\,dz.$$

574

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{y+z-1}^{0} f\,dx\,dz\,dy, \quad \int_0^1 \int_{z-1}^{0} \int_0^{1+x-z} f\,dy\,dx\,dz,$$

$$\int_{-1}^0 \int_0^{1+x} \int_0^{1+x-z} f\,dy\,dz\,dx,$$

$$\int_0^1 \int_{y-1}^{0} \int_0^{1+x-y} f\,dz\,dx\,dy, \quad \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} \int_0^{1+x-y} f\,dz\,dy\,dx.$$

576

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\pi} x^2 \cos z\,dz\,dy\,dx$$
$$+\int_{1-\pi}^0 \int_{1-x}^{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos z\,dz\,dy\,dx = 0.$$

Véase la Figura 86.

577 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dz\,dy\,dx = \frac{1}{3}.$

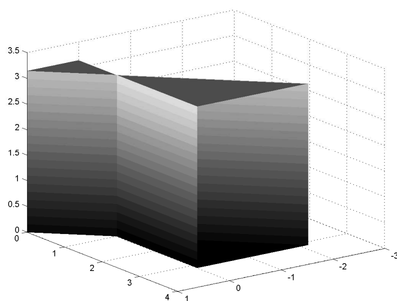


Figura 86. Representación gráfica del Ejercicio **576**

578 $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{x+y+1} dz\, dy\, dx = \frac{88}{3}.$

580 $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\, dy\, dx = \frac{16}{3}a^3.$
(Figura 87).

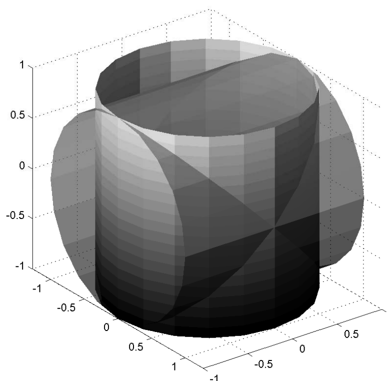


Figura 87. Gráfica del Ejercicio **580**

581 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\operatorname{sen}(x+y)}^{\cos^2(x+y)} dz\, dy\, dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{2}.$

582 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-z} dy\,dz\,dx = \frac{256}{15}.$

583 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_{0}^{10-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \frac{332}{105}.$

585 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$

587 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx.$

589 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \frac{101\sqrt{3}}{105}+\frac{8\pi}{3}.$

Sección 3.3

Cambios de variable

590 $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\alpha} r\,dr\,d\theta = \pi\alpha^2.$

591 $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1+\cos(2\theta)} r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}.$

593 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{2+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = 4+\frac{\pi}{4}.$

595 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{2}} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}.$

597 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{\frac{2}{\cos\theta}} \mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = 2\ln 2.$

599 (a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{\frac{1}{2}+y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} f(x,y)\,dy\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2\cos(2\theta)}}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta.$

601 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta.$

602 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta.$

605 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{10-r^2}-2\right)r\,dr\,d\theta = \frac{20\pi\sqrt{10}}{3}-\frac{52\pi}{3}.$

607 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^4\,dr\,d\theta = \frac{64\pi}{5}.$

608 (Polares) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\log 2.$

609 (Polares) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}.$

610 (Polares) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\theta}^1 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$

612 $x=\frac{3}{5}u+\frac{1}{5}v$, $y=\frac{2}{5}u-\frac{1}{5}v$; $\displaystyle\int_1^2\int_2^5\frac{1}{5}\,dv\,du = \frac{3}{5}.$

613 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$. $\displaystyle\int_1^2\int_1^2\frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\ln 2.$

614 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}}$, $y=\sqrt{\frac{v}{u}}$; $\displaystyle\int_3^6\int_2^4\frac{1}{2v}\,du\,dv = \ln 2.$

615 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{u^2v}}$, $y=\frac{1}{\sqrt[3]{uv^2}}$; $\displaystyle\int_1^2\int_1^4\frac{1}{3u^2v^2}\,dv\,du = \frac{1}{8}.$

616 $u=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$, luego $x=\dfrac{2u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{2v}{u^2+v^2}$;

$$\int_1^3\int_1^4\frac{1}{4}\,dv\,du = \frac{3}{2}.$$

617 Hacemos el cambio $u=x-y$, $v=x+y$, luego

$$\int_0^1\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{4}(e-\frac{1}{e}).$$

618 (Esféricas)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\frac{\rho^2\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

620 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{1+r}^{\sqrt{25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{41\pi}{3}.$

621 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{1+r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$

624 Cardioide de revolución alrededor del eje Z,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\phi}\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{8\pi}{3},$$

(véase la Figura 75(c)).

625 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r\operatorname{sen}(r^2)\,dr\,d\theta = \pi(1-\cos(1)).$

628 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_2^{3} ze^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{5\pi}{2}(e^4-1).$

630 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r(zr\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\,dz\,dr\,d\theta = 0.$

631

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_0^{\pi}\rho^3(\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi+\cos\phi\operatorname{sen}\phi)\,d\phi\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

634 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha}\int_{\sqrt{\alpha^2-r^2}}^{\alpha} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{12}\alpha^3.$

635 (Cilíndricas desplazadas $x = r\cos\theta$, $y = \frac{1}{2} + r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{r^2+r\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{4}}^{-r^2+r\operatorname{sen}\theta+\frac{3}{4}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

637 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}}\int_r^{1-2r} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{27}.$

638 (Cilíndricas cambiadas $x = x$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{10-2r^2}}^{\sqrt{10-2r^2}} r\,dx\,dr\,d\theta = \frac{4\pi}{3}(10\sqrt{10} - 16\sqrt{2}).$$

639 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{2}).$

641 (Cilíndricas cambiadas $x = x$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dx\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}).$$

643 (Esféricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \cos\phi\operatorname{sen}^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$

645 (Cilíndricas dilatadas: $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} 6r\,dz\,dr\,d\theta = 3\pi.$$

646 (Cilíndricas desplazadas y dilatadas $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{1}{4}r^2}^{\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{24}.$$

647 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dy\,dx.$

648 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{\sqrt{3}x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx.$

650 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x^2+y^2} xz\,dz\,dy\,dx.$

652

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^1 (x + y)\,dz\,dx\,dy + \int_{-2}^0\int_{-\sqrt{-2y-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}}\int_0^1 (x + y)\,dz\,dx\,dy.$$

653 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$

655

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{3}x} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dy\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dy\,dx.$$

Soluciones del Capítulo 4

Sección 4.1

Curvas en el plano y el espacio

656 Segmento del eje $x = 0$ entre $(0, -1)$ y $(0, 1)$ que vuelve hasta $(0, \frac{1}{2})$.

657 Recta $x - 2y = 3$ recorrida desde $x = -\infty$ a $x = +\infty$.

658 Grafo de $y = -\sqrt{x}$ partiendo de $(0, 0)$.

661 Rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ recorrida de abajo hacia arriba (Figura 88)

662 $\sigma(t) = (-3 + 7t, 2 - 2t)$, $t \in [0, 1]$.

663 $\sigma(t) = (6 \cos t, 6 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

665 $\sigma(t) = (t, \tan t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

667 $\sigma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \sec t, \frac{1}{\sqrt{3}} \tan t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

669 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{9}$.

670 $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

671 $y + \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi^2}{4}$.

672 $x + y = 3$.

673 $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

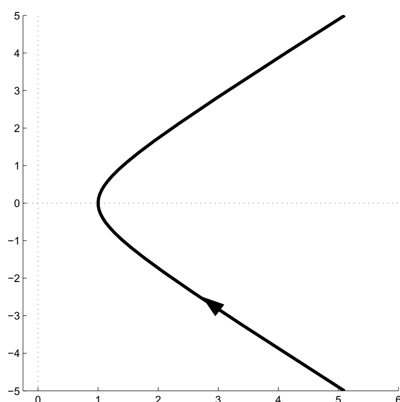


Figura 88. Gráfica del Ejercicio **661**

675 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} a|t|\,dt = a\pi^2.$

676 $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} 3|\operatorname{sen} t\cos t|\,dt = 6.$

677 $\displaystyle\int_{0}^{1} (e^t + e^{-t})\,dt = e - e^{-1}.$

678 $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{8}} 6t\sqrt{t^2+1}\,dt = 52.$

679 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt = \frac{1}{2}\log(3+2\sqrt{2}).$

681 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\,d\theta = \pi a.$

682 $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \frac{1}{2}(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}).$

684 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = 1.$

Sección 4.2

Integrales de línea

685 $\displaystyle\int_0^1 (9+8t)\sqrt{9t+4t^2}\,dt = \frac{26}{3}\sqrt{13}.$

686 $\displaystyle\int_{-1}^0 t^3\sqrt{1+9t^4}\,dt = \frac{1}{54}(1-10\sqrt{10}).$

687 $\displaystyle\int_0^{\frac{20}{3}} (1+\frac{9}{4}t)^{3/4}\,dt = \frac{2032}{63}.$

688 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$

690 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^4}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{24}\sqrt{5}.$

692 $\sigma_1(t)=(0,t)$, $t\in[0,1]$;
$\sigma_2(t)=(t,1-t)$, $t\in[0,1]$;
$\sigma_3(t)=(-t,0)$, $t\in[0,1]$;

$$\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 \sqrt{2}\,dt+\int_{-1}^0(-t)\,dt=\sqrt{2}-1.$$

694 σ es el trozo de recta $y=x$ entre $(1,1)$ y $(0,0)$ con recorrido de ida y vuelta; $\displaystyle\int_\sigma f\,d\sigma=0$, $\displaystyle\operatorname{long}(\sigma)=\int_{-1}^1\sqrt{32}|t^3|=\frac{\sqrt{32}}{2}.$

695 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$

696 $\displaystyle\int_0^1 3t\,dt=\frac{3}{2}.$

697 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\operatorname{sen}(2t))\,dt=-1.$

699 $\sigma_1(t)=(1-t,t,0)$, $t\in[0,1]$; $\sigma_2(t)=(0,1-t,t)$, $t\in[0,1]$;
$\sigma_3(t)=(t,0,1-t)$, $t\in[0,1]$;

$$\int_{\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3} F\cdot d\sigma=0.$$

701 $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

703 $\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{11}{15}.$

705 $\sigma(t) = (t, 3)$, $t \in [0, 2]$; $\displaystyle\int_0^2 te^3\, dt = 2e^3.$

706 $\sigma(t) = (t, t)$, $t \in [0, \pi$; $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t + \operatorname{sen} t)\, dt = 2.$

709 Véase la Figura 89. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (-3\cos^5 t \operatorname{sen} t + 3\operatorname{sen}^5 \cos t)\, dt = 0.$

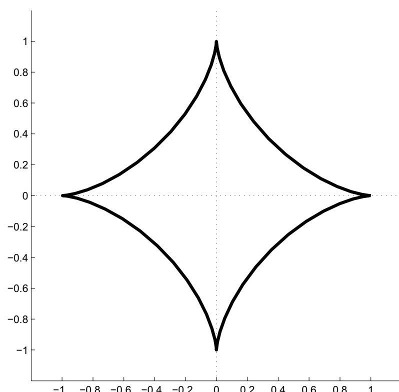


Figura 89. Hipocicloide del Ejercicio **709**

710 $\sigma(t) = (1, 1 + t, 1 + 3t)$, $t \in [0, 1]$; $\displaystyle\int_0^1 (4 + 6t)\, dt = 7.$

711 Grafo de $y = \operatorname{sen} x$ con $x \in [0, \pi]$; $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} 3t^2(1+\cos^2(t^3))\, dt = \frac{3\pi}{2}.$

714 $\sigma(t) = (2\cos t, -2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$; $\displaystyle\int_0^{\pi} (-1)\, dt = -\pi.$

716 $\sigma_1(t) = (2 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$; $\sigma_2(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$; $\sigma_3(t) = (-1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$;

$\displaystyle\int_0^{\pi} (-1)\, dt = -\pi.$

717 $\sigma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

718 $\sigma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

721 $\sigma(t) = (t, 2t, 4t)$, $t \in [0, 1]$; $\displaystyle\int_0^{1} (16t^2 - 3t)\, dt = \frac{23}{6}$.

722 $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1, 2]$; $\displaystyle\int_1^{2} (t^3 - 2t^2 + 3t^4)\, dt = \frac{1061}{60}$.

723 $\sigma(t) = (\cos(-t), b\sin(-t))$, $t = [-\pi, 0]$;

$$\int_{-\pi}^{0} (3b^2\,\mathrm{sen}^3(-t) + 2\,\mathrm{sen}(-t) + 16b\cos^2(-t))\, dt = 4b^2 + 4 + 8b\pi;$$

Trabajo mínimo para $b = \pi$.

Sección 4.3

Potenciales escalares

726 No es gradiente.

727 Es gradiente. Potencial escalar $f(x, y) = y\,\mathrm{sen}\, x$.

728 Es gradiente. Potencial escalar $f(x, y) = \frac{3}{2}x^3 + 5xy - y^2$.

729 No es gradiente.

731 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x, y) = \frac{x^4}{4} + x^2y + xy^2 + \frac{y^4}{4}$.

732 Es gradiente allí donde está definido. Potencial escalar: $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{2/3} + x\sqrt{y}$.

734 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x, y, z) = x^2yz - \cos x$.

736 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x, y, z) = \mathrm{sen}(xz) + \cos(xz) + 1$.

738 $\displaystyle\frac{\partial P(x)}{\partial y} = \frac{\partial Q(y)}{\partial x} = 0$.

739 $\displaystyle\frac{\partial f(x + y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x + y)}{\partial y} = f'(x + y)$.

742 $f(x, y) = e^{xy}$; $f(5, -1) - f(-5, 1) = 0$.

743 $f(x, y) = x^3y^2$; $f(4, 2) - f(1, 0) = 256$.

748 (a) $\sigma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\mathrm{sen}^2 t \cos t\, dt = 0$.

(b) $\nabla \times F = 0$; $f(x, y, z) = x^2y + xz^3$.

Sección 4.4

Superficies

751 $\mathbf{n}(u,v) = (2-\cos v)(\cos u\cos v, \operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} v)$. Es suave. Se trata de un toro generado por la circunferencia de radio 1 en el plano XZ con centro en el punto $(2,0,0)$ que gira alrededor del eje Z (Figura 90).

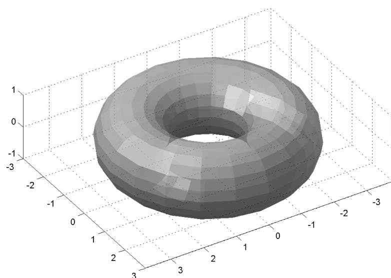


Figura 90. Toro del Ejercicio **751**

752 $(-4,-4,4)\cdot(x-1,y-1,z-2)=0 \Rightarrow z=x+y$.

754 $(-6,-8,1)\cdot(x-1,y,z-3)=0 \Rightarrow z=6x+8y-3$.

756 Véase la Figura 91 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{5}|\cos\theta|\,dr\,d\theta = 4\sqrt{5}$.

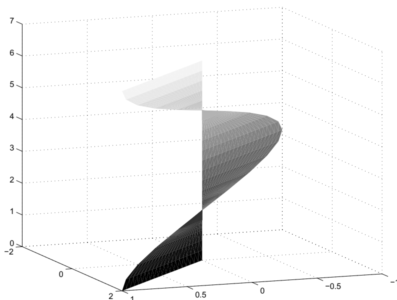


Figura 91. Gráfica del Ejercicio **756**

757 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi.$

760 $\Phi(u,v) = (u, v, -\sqrt{1+u^2+v^2})$, $u \in [-1,1]$, $v \in [-3,3]$ (véase la Figura 92).

761 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta + 3)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

764 $\Phi(u,v) = (u, 4u+v^2, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$.

765 $\Phi(\theta,\phi) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

767 $\Phi(r,\theta) = (4(1-r^2), 2r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}r\cos\theta)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

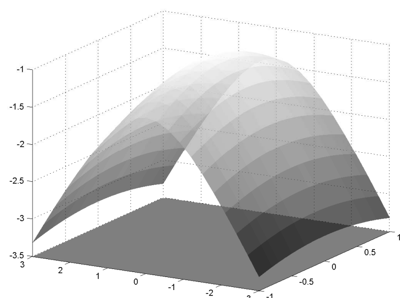


Figura 92. Gráfica del Ejercicio **760**

770 Véase la Figura 93 $\Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $r \in [0,\cos\theta]$;
$\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{1-r^2})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $r \in [0,\cos\theta]$;

$$\text{Área} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \, d\theta = \pi - 2.$$

772 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 4 - r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,2]$;
$\mathbf{n}(r,\theta) = (r, 2r, r)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{6}r \, dr \, d\theta = 4\sqrt{6}\pi.$$

773 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r^2\cos(2\theta))$, $r \in [1,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}(r,\theta) = (2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$;

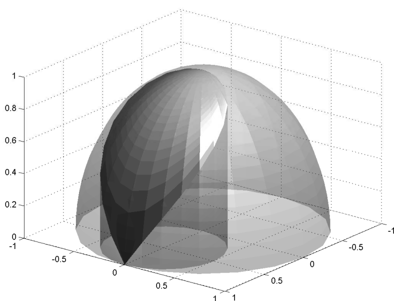


Figura 93. Gráfica del Ejercicio **770**

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

775 $\Phi(\theta,z)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[0,\pi]$, $z\in[\operatorname{sen}\theta,2\operatorname{sen}\theta]$; $\mathbf{n}(\theta,z)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)$;

$$\int_0^{\pi}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} dz\,d\theta = 2.$$

776 $\Phi(\theta,z)=(2\cos^2\theta,2\cos\theta\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $z\in[0,2\cos\theta]$; $\mathbf{n}(\theta,z)=(2\cos(2\theta),2\operatorname{sen}(2\theta),0)$;

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 2\,dz\,d\theta = 8.$$

778 $\Phi(\theta,\phi)=(\sqrt{3}\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\phi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,\pi]$;
$\mathbf{n}(\theta,\phi)=(-\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi,-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi,-3\operatorname{sen}\phi\cos\phi)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\phi\sqrt{1+\cos^2\phi}\,d\phi\,d\theta = 6\pi+3\sqrt{2}\pi\log(\sqrt{2}+1).$$

779 $\Phi(\theta,z)=(\sqrt{2z-z^2}\cos\theta,\sqrt{2z-z^2}\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[1,2]$;
$\mathbf{n}(\theta,z)=(\sqrt{2z-z^2}\cos\theta,\sqrt{2z-z^2}\operatorname{sen}\theta,z-1)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 dz\,d\theta = 2\pi.$$

SECCIÓN 4.5

Integrales de superficie

781 $\Phi_1(u,v) = (u,v,0)$, $u \in [0,1]$, $v \in [u,1]$;
$\Phi_2(u,v) = (u,0,v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1-u]$;
$\Phi_3(u,v) = (u,u,0)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1-u]$;
$\Phi_4(u,v) = (u,v,1-u)$, $u \in [0,1]$, $v \in [u,1]$;

$$\int_0^1 \int_u^1 uv\, dv\, du + \int_0^1 \int_0^{1-u} u^2\sqrt{2}\, dv\, du + \int_0^1 \int_u^1 uv\sqrt{2}\, dv\, du = \frac{1}{8} + \frac{5\sqrt{2}}{24}.$$

783 $\Phi_1(u,v) = (u,v,-1)$, $u,v \in [0,1]$; $\Phi_2(u,v) = (u,v,1)$, $u,v \in [0,1]$;
$\Phi_3(u,v) = (u,-1,v)$, $u,v \in [0,1]$; $\Phi_4(u,v) = (u,1,v)$, $u,v \in [0,1]$;
$\Phi_5(u,v) = (-1,u,v)$, $u,v \in [0,1]$; $\Phi_6(u,v) = (1,u,v)$, $u,v \in [0,1]$;

$$\int_0^1 \int_0^1 du\, dv = 1; \int_0^1 \int_0^1 v^2\, du\, dv = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_S z^2\, dS = \frac{10}{3}.$$

785 $\Phi(u,v) = (u,v,1-u-v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1-u]$; $\mathbf{n}(u,v) = (1,1,1)$;

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} \sqrt{3}u(1-u-v)\, dv\, du = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

786 $\Phi(u,v) = (u,u^2+4v,v)$, $u \in [0,2]$, $v \in [0,2]$;
$\mathbf{n}(u,v) = (2u,-1,4)$;

$$\int_0^2 \int_0^2 u\sqrt{4u^2+17}\, dv\, du = \frac{1}{6}(33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}).$$

788 $\Phi(r,\theta) = (4-r^2, r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$, $r \in [0,2]$, $v \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}(r,\theta) = (r, -2r^2\operatorname{sen}\theta, -2r^2\cos\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\sqrt{1+4r^2}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{8}(17\sqrt{17}\frac{46}{15} + \frac{2}{15}).$$

790 $\int_S F = \int_S F \cdot N\, dS = \int_S yz\, dS = 0.$

793 $\Phi(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$; El vector normal es $\mathbf{n}_{\text{ext}}(u,v) = (2u,2v,-1)$;

$$\int_0^1 \int_0^1 (2ue^v + 2v^2e^u - u^v)\, du\, dv = \frac{4}{3}(e-1) + \log 2.$$

794 $\Phi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2 - 9)$, $u \in [0,2]$, $v \in [0,1]$;
$\mathbf{n}_{\text{int}}(u,v) = (-2u, -2v, 1)$;

$$\int_0^2 \int_0^1 (-2u^3 v + 6uv^3 + 4v^3)\, dv\, du = 1.$$

796 $\displaystyle\int_S F = \int_S F \cdot N\, dS = \int_S (x,y,z) \cdot (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})\, dS = 3\text{Area}(S) = 108\pi.$

797 $\Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r^2, r\,\text{sen}\,\theta)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}_1(r,\theta) = (2r^2\cos\theta, -r, 2r^2\,\text{sen}\,\theta)$;

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^4 - r^2\,\text{sen}^2\,\theta)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{15};$$

$$\int_{S_2} F = \int_{S_2} (0, y, -z) \cdot (0,1,0)\, dS = \int_{S_2} y\, dS = \text{Area}(S) = \pi;$$

Flujo total $= \frac{16}{15}\pi$.

799 $\Phi(\theta,\phi) = (\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, \cos\phi)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$;
$\mathbf{n}(\theta,\phi) = -\text{sen}\,\phi\Phi(\theta,\phi)$;

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta\,\text{sen}^2\,\phi - \cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^3\,\phi - \text{sen}\,\phi\cos^3\phi)\, d\phi\, d\theta = -\frac{2\pi}{3}.$$

801 Usar que $\displaystyle\int_S F = \int_S F \cdot N$, con N la normal unitaria a S.

802 $\Phi(\theta,\phi) = (R\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, R\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, R\cos\phi)$, $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$;
$\mathbf{n}(\theta,\phi) = -R^2\,\text{sen}\,\phi\Phi(\theta,\phi)$;

$$\text{Area}(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\,\text{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{R^2\pi}{2};$$

$$\bar{x} = \tfrac{1}{\text{Area}(S)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos\theta\,\text{sen}^2\,\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{R}{2};$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{\text{Area}(S)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\,\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{R}{2};$$

$$\bar{z} = \tfrac{1}{\text{Area}(S)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos\phi\,\text{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{R}{2}.$$

Soluciones del Capítulo 5

Sección 5.1

Campos vectoriales

805 $\nabla \times F = (-2yz, -2xz, -x^2)$; $\operatorname{div} F = 2xy + z^2 + x^2$.

806 $\nabla \times F = (-x^2z, 2xyz + y^2, -2yz)$; $\operatorname{div} F = -x^2y$.

808 $\nabla \times F = \left(\frac{x}{z}, -\frac{y}{z} + xye^{xyz}, \cos(x-y) - xze^{xyz}\right)$;
$\operatorname{div} F = yze^{xyz} - \cos(x-y) - \frac{xy}{z^2}$.

809 Calcúlese $\nabla \times F$.

810–814 Véase el Ejercicio **813**.

815–817 Véase el Ejercicio **818**

Sección 5.2

Teorema de Green

819 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (-2)\, dA = -2.$

820 $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

$$\int_{\partial D} xy\, dx + xy\, dy = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t \cos t + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = 0;$$

$$\iint_D (y-x)\,dA = \text{(polares)}= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = 0.$$

822 Si D es la región encerrada por la curva C,

$$\int_C (x^3+y^3)\,dy - (x^3+y)\,dx = \iint_D (3x^2+1)\,dA = \text{[Polares]}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r^2\cos^2\theta + 1)r\,dr\,d\theta = \frac{7\pi}{4}.$$

824 $\displaystyle\int_C F\cdot d\sigma = \iint_R (-1)\,dA = -\text{Area}(R) = -\pi.$

825 $\displaystyle\int_1^2\int_1^2 (6xy - x^2)\,dx\,dy = \frac{67}{6}.$

826 $\sigma_1(t) = (1+4t, -t)$, $t\in[0,1]$; $\sigma_2(t) = (5-2t, -1+5t)$, $t\in[0,1]$; $\sigma_3(t) = (3-2t, 4-4t)$, $t\in[0,1]$;

$$\text{Area(R)} = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 (-1)\,dt + \int_0^1 23\,dt + \int_0^1 (-4)\,dt\right) = 9.$$

828 $\sigma_1(t) = (t, t^3)$, $t\in[0,1]$; $\sigma_2^-(t) = (t, \sqrt{t})$, $t\in[0,1]$;

$$\text{Area(R)} = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 2t^3\,dt - \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt\right) = \frac{5}{12}.$$

830 Si $F = f\nabla g$ entonces $\operatorname{div} F = \nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g$.

831 Escribir la primera identidad de Green para f y g y para g y f y luego restar.

832 Véase la solución del Ejercicio **827**.

833 Aplicar el Teorema de Green para $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

834 (a) $\partial R = C_1 \cup C_2$ con:
$C_1 \equiv \alpha_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$; $C_2 \equiv \alpha_2(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$;
Nótese que C_1 tiene orientación contraria.

$$\int_{C_1} P\,dy - Q\,dx = -2\pi;\ \int_{C_2} P\,dy - Q\,dx = 2\pi;\ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D^+} P\,dy - Q\,dx = 2\pi.$

(c) P y Q no están definidos en el origen.

838 $\displaystyle\int_C F = \iint_D 3(x^2+y^2)\,dA = \text{(polares)} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\pi.$

Sección 5.3

Teorema de Gauss

839 $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = 3.$

842 $\displaystyle\int_S F = \int_0^2\int_0^3\int_0^4 2x\,dz\,dy\,dx = 48.$

844 $D = \{0 \le z \le 9-(x+1)^2-(y-2)^2\}$;

$$\int_S F = \iiint_D 3\,dV = \text{(cilíndricas desplazadas)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} 3r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{243}{2}\pi.$$

845 Puesto que S es cerrada, si D es el volumen encerrado por S, usando el Teorema de Gauss:

$$\int_S F = \iiint_D \operatorname{div} F\,dV = \iiint 3\,dV = 3\mathrm{Vol}(D) = 2\pi.$$

847 Si D es el volumen $\{z \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \le 4-\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ (Figura 94),

$$\iiint_D \operatorname{div} F\,dV = \text{(Cilíndricas)} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-\sqrt{1-r^2}} 2zr\,dz\,dr\,d\theta = \frac{67}{6}\pi;$$

$\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con $S_1 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$, $S_2 = \{x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 4\}$ y $S_3 = \{x^2+y^2+(z-4)^2 = 1,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \le 4\}$;

$S_1 \equiv \Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,1]$, $\|\mathbf{n}_1(r,\theta)\| = r$;

$$\int_{S_1} F = \int_{S_1} (xz, yz, xy)\cdot(0,0,-1)\,dS = \int_{S_1} -xy\,dS$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = 0;$$

$S_2 \equiv \Phi_2(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in [0,4]$,
$\mathbf{n}_2(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$;

$$\int_{S_2} F = \int_0^{2\pi}\int_0^4 z\,dz\,d\theta = 16\pi;$$

$S_3 \equiv \Phi_3(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 4-\sqrt{1-r^2})$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,1]$,
$\mathbf{n}_3(r,\theta) = (-\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, -\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r)$;

$$\int_{S_3} F = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{-r^3(4-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} + r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) dr\,d\theta = -\frac{29}{6}\pi;$$

Finalmente $\displaystyle\int_{\partial D} F = 16\pi - \frac{29}{6}\pi = \frac{131}{6}\pi.$

851 Basta aplicar el Teorema de Gauss.
Una parametrización del cono es: $\Phi_1(r,\theta) = (ar\cos\theta, ar\operatorname{sen}\theta, hr)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}_1(r,\theta) = (ahr\cos\theta, ahr\operatorname{sen}\theta, -a^2r)$;

$$\tfrac{1}{3}\int_{\Phi_1} F = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (a^2r^2h\cos^2\theta + a^2r^2h\operatorname{sen}^2\theta - a^2r^2h)\,dr\,d\theta = 0;$$

La tapa: $\tfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\Phi_2} F = \frac{1}{3}\int_{\Phi_2}(x,y,z)\cdot(0,0,1)\,dS = \frac{1}{3}\text{Area}(\Phi_2) = \frac{1}{3}\pi a^2 h.$

852 Basta usar que $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.

853

$$\int_S F = \iiint_D \operatorname{div} F\,dV = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{r}-1}{2}}}\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} 3r(r^2+z^2)\,dz\,dr\,d\theta.$$

855 Si cerramos la superficie S con S_1, S_2 generando un volumen D, (véase la Figura 95)

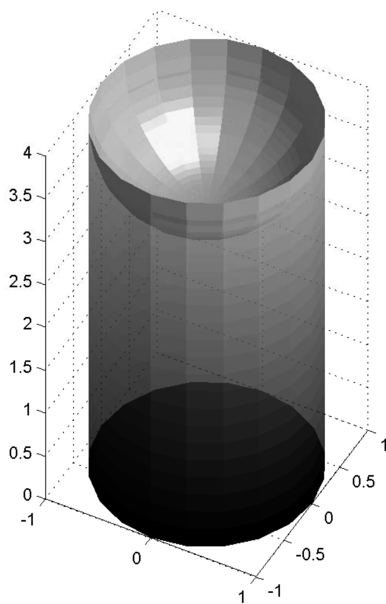


Figura 94. Volumen del Ejercicio **847**

$$\int_{S\cup S_1\cup S_2} F = \iiint_D \operatorname{div} F\, dV = 0;$$

$$S_1 \equiv \Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1),\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1];\ \|\mathbf{n}_1(r,\theta)\| = r;$$
$$S_2 \equiv \Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 2),\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,2];\ \|\mathbf{n}_2(r,\theta)\| = r;$$

$$\int_{S_1} F = \int_{S_1} F\cdot(0,0,-1)\,dS$$

$$= \int_{S_1}(x^2-y^2)z\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos(2\theta)\,dr\,d\theta = 0;$$

$$\int_{S_2} F = \int_{S_2} F \cdot (0,0,1)\, dS$$

$$= \int_{S_1} (y^2 - x^2) z\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^3 \cos(2\theta)\, dr\, d\theta = 0.$$

Finalmente $\displaystyle\int_S F = 0$.

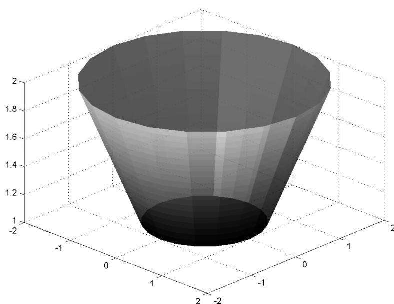


Figura 95. Gráfica del Ejercicio **855**

857 Como la superficie es cerrada

$$\int_S (xy^2, x^2y, y) = \iiint_D (y^2 + x^2)\, dV$$

$$= \text{(Cilíndricas)} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^3\, dz\, dr\, d\theta = \pi.$$

Sección 5.4

Teorema de Stokes

858 $\sigma^+(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4\cos^2 t),\ t \in [0, 2\pi]$;

$$\int_{\partial S} F = \int_0^{2\pi} (4 - 32\cos^3 t \operatorname{sen} t)\, dt = 8\pi;$$

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2\cos^2\theta),\ r \in [0,2],\ \theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}_{\text{int}}(r,\theta) = (-2r^2\cos\theta, 0, r)$;

$$\int_S \nabla \times F = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r\, dr\, d\theta = 8\pi.$$

860 $\sigma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 1]$;

$$\int_S F = 0;\ \nabla \times F = 0.$$

861 $\sigma_1(t) = (1 - t, t, 0)$, $t \in [0, 1]$; $\sigma_2(t) = (0, 1 - t, t)$, $t \in [0, 1]$; $\sigma_3(t) = (t, 0, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$;

$$\int_{\partial S} F = 0;\ \nabla \times F = 0.$$

862

$$\int_C F = \int_S \nabla \times F = \int_S (\nabla \times F) \cdot \mathbf{N} = \int_S (3, -2, -1) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.$$

864 (Véase la Figura 96) $\Phi(r, \theta) = (\frac{1}{2} + r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2} + r\cos\theta)$, $r \in [0, \frac{1}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $\|\mathbf{n}(r, \theta)\| = \sqrt{2}r$;

$$\int_C F = \int_S \nabla \times F = \int_S (-2z, xy - z, -xz) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \int_S \frac{z}{\sqrt{2}}(2 - x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{3}{4} - r^2\cos^2\theta + r\cos\theta)\, dr\, d\theta = \frac{17}{24}\pi.$$

865 Para $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, ∂S_1: $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $\in [0, 2\pi]$;

$$\int_{S_1} \nabla \times F = \int_{\partial S_1} F = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, -\operatorname{sen}^3 t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = 0.$$

Para $S_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0\}$, $\partial S_2 \equiv \sigma^-(t)$. Luego $\int_{S_2} \nabla \times F = 0$.

867 Por el Teorema de Stokes, como $\partial S_1 = \partial S_2$,

$$\int_{S_1} \nabla \times F = \int_{\partial S_1} F = \int_{\partial S_2} F = \int_{S_2} \nabla \times F.$$

Como $\bar{S} = \{x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ tiene la misma frontera que S,

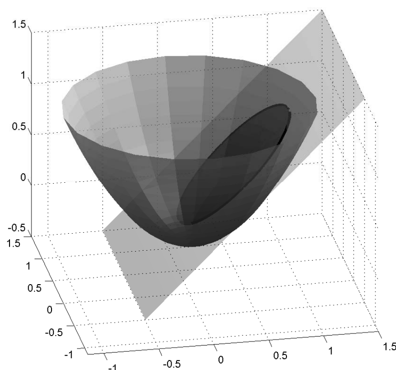


Figura 96. Ejercicio **864**: paraboloide cortado por un plano

$$\int_S \nabla \times F = \int_{\bar{S}} \nabla \times F = \int_{\bar{S}} \nabla \times F \cdot \mathbf{N} = \int_{\bar{S}} (1,-1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\, dS = 0.$$

868 (a) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$;

$\displaystyle\int_C F = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. F no puede ser conservativo pues la integral a lo largo de C, que es una curva cerrada, no es nula.

(b) F no está definido en el eje Z, y por tanto no puede estar definido en todo punto de una superficie que tenga a C como frontera.

871 Si $S \equiv \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1 - r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta))$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$,
$\|\mathbf{n}(r,\theta)\| = \sqrt{3}r$;

$$\int_C F = \int_S \nabla \times F = \int_S (0,0,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{3}r\, dr\, d\theta = 2\pi.$$

Sección 5.5

Potenciales vectoriales

872 No. $\operatorname{div}(xy^2, yz^2, zx^2) \neq 0$.

873 Sí. $G = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2y}{2} - \frac{yz^2}{2}, 0)$.

878 (a) $S \equiv \Phi(u,v) = (u, v, u+v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [\frac{u^2}{2}, \sqrt{u}]$; $\mathbf{n}(u,v) = (-1,-1,1)$;

$$\int_S F = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{\sqrt{v}} -2u\,dv,\ du = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}.$$

(b) Cerramos S con (véase la Figura 97):

$S_1 \equiv \Phi_1(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [0, u + \frac{u^2}{2}]$; $\mathbf{n}_1(u,v) = (u, -1, 0)$;
$S_2 \equiv \Phi_2(u,v) = (u^2, u, v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{2}]$, $v \in [0, u+u^2]$; $\mathbf{n}_2(u,v) = (-1, 2u, 0)$;
$S_3 \equiv \Phi(u,v) = (u, v, 0)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [\frac{u^2}{2}, \sqrt{u}]$; $\mathbf{n}_3(u,v) = (0,0,-1)$;
tal que $\partial D = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Como $\operatorname{div} F = 0$,

$$\int_{S_1\cup S_2\cup S_3} F = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \int_0^{u+\frac{u^2}{2}} u(v-1)\,dv\,du$$

$$+ \int_0^{\sqrt[3]{2}} \int_0^{u+u^2} (2u^3 - v)\,dv\,du + \int_0^{\sqrt[3]{4}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{\sqrt{u}} -v\,dv\,du$$

$$=(-1 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{2}) + (1 + \frac{3}{5}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}) - \frac{3}{10}\sqrt[3]{2} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{4};$$

(c) $F = \nabla \times G \Rightarrow G = (xz - \frac{y^2}{2}, 0, yz)$;
$\partial S = \alpha_1 \cup \alpha_2$, con: $\alpha_1^-(u) = (u^2, u, u+u^2)$, $u \in [0, \sqrt[3]{2}]$; $\alpha_2(u) = (u, \frac{u^2}{2}, u + \frac{u^2}{2})$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$;

$$\int_{\alpha_1^-} G = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{u^2}{2} + u^4 + u^3, 0, u^3 + u^2\right) \cdot (2u, 1, 2u+1)\,du = 2 + \frac{8}{5}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2};$$

$$\int_{\alpha_2} G = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(-\frac{u^4}{8} + u^2 + \frac{u^3}{2}, 0, \frac{u^3}{2} + \frac{u^4}{4}\right) \cdot (1, u, 1+u)\,du = 2 + \sqrt[3]{2} +$$

$\sqrt[3]{4}$;

Finalmente: $\displaystyle\int_{\partial S} G = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}$.

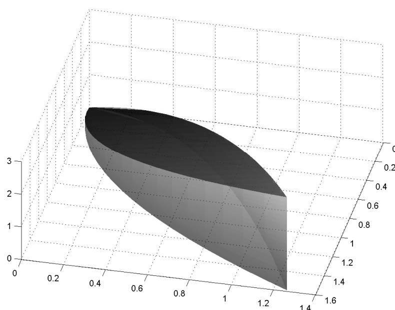


Figura 97. Región del Ejercicio **878**

879 Como $\operatorname{div} F = 0 \Rightarrow F = \nabla \times G$ con $G = (xz - \frac{y^2}{2}, 0, yz)$, luego $\displaystyle\int_S F = \int_S \nabla \times G = \int_{\partial S} G$;
$S \equiv \Phi(u,v) = (r, r^2, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$, $\mathbf{n}(u,v) = (2u, -1, 0)$;

$$\int_S F = \int_0^1 \int_0^1 (2uv - u)\, dv\, du = 0;$$

$\partial S = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$, con
$\alpha_1(u) = (u, u^2, 0)$, $u \in [0,1]$; $\alpha_2(u) = (1, 1, v)$, $v \in [0,1]$;
$\alpha_3^-(u) = (u, u^2, 1)$, $u \in [0,1]$; $\alpha_4^-(v) = (0, 0, v)$, $v \in [0,1]$;

$$\int_{\alpha_1} G = \int_0^1 -\frac{1}{2}u^4\, du = -\frac{1}{10}; \int_{\alpha_2} G = \int_0^1 v\, dv = \frac{1}{2};$$

$$\int_{\alpha_3^-} G = \int_0^1 -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}u^4 + u)\, du = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2}; \int_{\alpha_4^-} G = 0;$$

Finalmente $\displaystyle\int_{\partial S} G = 0$.

881 $S \equiv \Phi(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2}\big)$, $\theta \in [0,\pi]$, $r \in [0, \frac{4}{5}\sin\theta]$ (Figura 98);

$$\int_S F = \int_0^\pi \int_0^{\frac{4}{5}\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{4}{25}\pi;$$

Como $\operatorname{div} F = 0 \Rightarrow F = \nabla \times G$, con $G = (0, x, 0)$;

$\partial S = (\frac{2}{5}\sin(2\theta), \frac{4}{5}\operatorname{sen}^2\theta, \sqrt{1 - \frac{16}{25}\cos^2\theta})$, $\theta \in [0, \pi]$;

$$\int_\partial G = \int_0^\pi \frac{32}{25}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{4}{25}\pi.$$

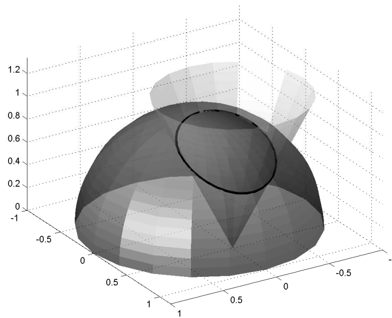


Figura 98. Gráfica del Ejercicio **881**

884 (a) $S \equiv \Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2)$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$; $\mathbf{n}(x, y) = (2x, 0, 1)$;

$$\int_S (z, z, y) = \int_{-1}^1 \int_0^1 (2x(1 - x^2) + y)\,dy\,dx = 1.$$

(b) Como $\operatorname{div}(z, z, y) = 0$ existe G tal que $\nabla \times G = (z, z, y)$. Por ejemplo $G = (\frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2}, -\frac{z^2}{2}, 0)$.

Entonces, $\displaystyle\int_S (z, z, y) = \int_{\partial S} G$. Por otro lado $\partial S = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$, con

$\alpha_1(t) = (1, t, 0)$, $t \in [0, 1]$; $\alpha_2(t) = (-1, 1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$;

$\alpha_3(t) = (\cos t, 1, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$; $\alpha_4(t) = (\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$, $t \in [-\pi, 0]$;

Finalmente $\displaystyle\int_{\partial S} G = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{2}\,dt = 1.$

INDICE

EDITORIAL

LEADING ARTICLE

Una vez más el Comité de Redacción del Anuario de Psicología Jurídica del Colegio Oficial de Psicólogos de Madrid, tiene el placer de presentar un nuevo ejemplar de nuestra revista con el objetivo de servir de comunicación entre los profesionales del área y con la ilusión de extender las aportaciones de nuevos psicólogos que se han introducido en este mundo a caballo entre la psicología y el derecho.

El Anuario de este año presenta variadas aportaciones que muestran las diferentes temáticas tratadas por los psicólogos en los siguientes artículos.

En **Perfil psicológico del homicida doméstico**. Este artículo pretende, identificar los rasgos sociales psicológicos y/o comportamentales de los maltratadores domésticos en aquellos casos que representan un peligro de muerte para la víctima.

Las diferencias encontradas entre población homicida y no homicida del estudio dan pie para enunciar un conjunto de indicadores de alto riesgo para la víctima de malos tratos.

Dada la actualidad del tema, por las recurrentes atrocidades que diariamente

importante para la toma de medidas preventivas.

Perfil del agresor sexual: estudiando las características psicológicas y sociales de los delincuentes sexuales de nuestras prisiones. El autor pretende mostrar una descripción lo más completa posible del agresor sexual, pese a su dificultad. Realiza una comparación entre los agresores sexuales y el resto de población penitenciaria, con el objetivo de permitir identificar diferenciadores relevantes que ayuden en la prevención y tratamiento de los mismos.

Evaluación de la credibilidad mediante indicadores psicofisiológicos. Este trabajo permite un acercamiento a la evaluación de la credibilidad mediante indicadores psicofisiológicos (polígrafo) con el fin de detectar la verdad y la mentira. El trabajo ofrece, finalmente, las aplicaciones prácticas de los resultados.

Alexitimia en personas en procesos de separación o divorcio. Los autores pretende, en este artículo, estudiar la dimensión "alexitimia" como variable en personas que se encuentran en un proceso de separación o divorcio, nos acercamos al aspecto familiar de la

los síntomas y dificultades de aquellas personas con alexitimia así como el impacto de la ruptura de pareja contenciosa en los mismos.

La Opinión de los jueces (derecho penal y de familia) sobre el informe psicológico forense. El objetivo de este estudio es conocer la opinión de los jueces de derecho penal y de familia, en relación a los informes periciales presentados en los Juzgados de cara a tomar decisiones respecto a la responsabilidad penal y alternativa de custodia. El artículo termina discutiendo los resultados obtenidos, al pasar un autoinforme a un grupo de jueces de distintas provincias andaluzas.

La reflexión. **La actuación del psicólogo forense en las salas de justicia. Apuntes sistémicos.** El autor hace una reflexión de la actuación del psicólogo forense en la sala de justicia. Tras hacer mención de los cambios legislativos acaecidos en el ordenamiento jurídico español en los últimos tiempos, el artículo repasa la regulación que diferentes jurisdicciones dan a la actuación de los peritos en la sala. Posteriormente hace una referencia a cada postulado de la Teoría de la Comunicación Humana. Finalmente, el artículo concluye con una serie de recomendaciones concretas para el desenvolvimiento del perito en la sala.

Incluimos en el Anuario dos recensiones sobre publicaciones que han visto la luz en 2003, ambas publicaciones van a resultar muy interesantes para aquellos profesionales interesados por estos temas. Desde aquí felicitar a nuestros compañeros Marta Ramírez y Javier Urra por sus aportaciones.

El Anuario continúa con el apartado dedicado a **Comentarios de películas** que muestra la extensión del quehacer de nuestros profesionales.

En algunos ámbitos de la especialidad no se han producido grandes novedades. Es así en los Cuerpos de Seguridad del Estado, donde la labor del psicólogo sigue centrándose en la selección y formación de personal, y sigue quedándose algo olvidada la tarea de investigación. De manera cada vez más frecuente las administraciones recurren al ejercicio privado para llevar a cabo la selección de agentes, lo que podría permitir a medio plazo que la actividad investigadora aumentase.

En el ámbito de los Juzgados de familia, menores y clínicas medico-forenses, el año 2003 ha servido para consolidar el trabajo realizado por los psicólogos así como la imagen de estos profesionales en la sociedad.

En los temas de familia, además del trabajo realizado por los equipos psicosociales de los Juzgados de Familia cuya labor es fundamental para el asesoramiento al juez, en los casos donde los padres discrepan respecto a la custodia de sus hijos, aparecen otros recursos para la familia donde también está presente nuestra profesión. El plan integral de apoyo a la familia, promovido por las Administraciones Públicas, en sus tres niveles de competencia: Administración General del Estado, las Comunidades Autónomas y las Corporaciones Locales, tiene cuatro grandes objetivos: 1) Incrementar la calidad de vida de las familias, 2) fomentar la solidaridad intergeneracional, 3) apoyar a la familia como garante de la cohesión social y 4) prestar

apoyo a las familias en situación de riesgo social.

De estos cuatro objetivos han surgido programas de: Orientación Familiar, Mediación y Puntos de Encuentro. Estos programas tienen como elemento común, elevar la calidad de vida de las familias, aunque presentan aspectos específicos así como metodologías diferentes que dan respuesta a situaciones diversas que se les plantea a las familias. En todos estos programas la figura del psicólogo está presente y resulta imprescindible en la constitución del equipo de trabajo.

La práctica de la psicología jurídica desde el ámbito privado sigue extendiéndose, centrándose principalmente en el peritaje. Si es novedad el cada vez mayor número de profesionales que desarrollan esta actividad, así como la cada vez más amplia oferta de formación (privada y pública) y celebración de congresos y jornadas. En mayo de 2003, el Centro Reina Sofía (Valencia) tuvo el privilegio de contar con las aportaciones del distinguido Dr. Ressler, quien habitualmente forma parte del equipo de trabajo del FBI.

En cambio, sí han tenido lugar acontecimientos de interés en las Fuerzas Armadas, donde está prevista, entre los años 2004-2006, una drástica reducción de la plantilla actual de psicólogos, lo que dejará un vacío de personal en las tareas de exámenes de ingreso, reconocimientos de aptitud, obtención/ renovación de permisos de conducción. Actualmente el psicólogo Militar dispone de la especialidad de psicología Clínica o realizar los reconocimientos descritos en el RD 944/2001, de 3 de Agosto, sobre la determinación de la aptitud psicofísica del personal de las FAS, lo que le permite desarrollar así mismo su labor en Hospitales, Centros de Unidad. Todo esto supone que se va a desaprovechar la experiencia y formación de una amplia plantilla que lleva funcionando mucho tiempo, incorporando nuevos profesionales que no dispongan de una experiencia tan dilatada.

Prescindir de este colectivo tomando como criterio la acumulación de 12 años de servicio o por superar los 38 años de edad, iría en perjuicio directo de cualquier política eficaz de personal, reduciendo directamente el valor añadido de la organización y en contra de las tendencias de unas Fuerzas Armadas modernas adaptadas al panorama internacional donde el perfil fundamental de sus miembros debe ser de carácter técnico y experimentado.

Resulta también preocupante la ausencia de igualdad de oportunidades dentro de la promoción interna del servicio. Esta igualdad ha estado ausente desde 1991 y aún hoy los Oficiales de Complemento Psicólogos se ven en una situación profesional dura al quedar excluidos de los citados procesos de promoción.

Dentro del creciente avance de la psicología durante el año 2003, en el ámbito de **Vigilancia Penitenciaría** de acuerdo a la ley 7/2003 que entró en vigor el 2 de agosto, se han producido cambios que afectan al área de la reinserción, así como a la elaboración de los informes Psicológicos Forenses. Esta ley recorta ostensiblemente la aplicación de beneficios penitenciarios, fundamentalmente terceros grados y libertad condi-

cional; la ley tienen como objetivo el cumplimiento integro de las condenas de ahí que se tienda a reducir la posibilidad para obtener los beneficios penitenciarios antes mencionados.

Tendiendo en cuenta que la constitución española establece con claridad que la aplicación de la privación de libertad por la comisión de delitos tiene dos funciones prioritarias, a saber el castigo y la rehabilitación del delincuente; a través de esta ley se acentúa el castigo y se resta prioridad al tratamiento. Lo que afecta al tratamiento de esta jurisdicción desde un punto de vista psicológico.

La Psicología Forense en Vigilancia Penitencia intenta conjugar el asesoramiento diagnóstico psicológico con la posibilidad de recuperar, tratar y disminuir el riesgo de reincidencia. Si continuamos por esta línea jurídica restrictiva nuestra función cada vez dejará de tener sentido. Confiemos que la reforma de las leyes vayan estableciendo un mayor apoyo a las víctimas sin que por ello se reste el tratamiento a los que dañan a otros porque o establecemos la cadena perpetua o apostamos por el tratamiento por el bien de la sociedad.

Esperamos que este Anuario sea del agrado de nuestros lectores y os animamos a participar en la elaboración del próximo número, mandando vuestros artículos y contribuyendo a cumplir uno de los objetivos del Anuario, que es servir de medio de comunicación de los psicólogos que se han enmarcado en nuestra área de especialidad.

Anuario de Psicología Jurídica, Volumen 13, año 2003. Págs. 9-26

ESTUDIOS

PERFIL PSICOLOGICO DEL HOMICIDA DOMÉSTICO

PSYCHOLOGICAL PROFILE OF DOMESTIC MURDERERS

Miguel Angel Soria Verde
Lorena Rodríguez Cortés

RESUMEN

El presente estudio constituye un intento de identificar aquellos rasgos sociales, psicológicos y/o comportamentales de los maltratadores domésticos capaces de situar a su víctima en peligro de muerte.

Una muestra de 46 hombres, 20 de ellos clasificados dentro del grupo homicida y 26 en el grupo de no homicidas, fueron entrevistados con el PPAD (Perfil Psicológico del Agresor Doméstico), entrevista semiestructurada diseñada ad hoc compuesta de los siguientes grandes bloques: datos sociodemográficos, características sociofamiliares del agresor, relación de pareja, violencia doméstica, motivación del agresor y comportamiento post-agresivo. Las variables sociales, psicológicas y comportamentales de los agresores incluidas en cada uno de estos seis bloques constituyen, según la bibliografía revisada, factores que generan, aumentan y/o mantienen el comportamiento violento.

El análisis estadístico de los datos, muestra la existencia de variables que se distribuyen de forma significativamente diferente entre la población homicida y la no homicida del estudio. Así, de los factores estudiados, se ha podido elaborar un conjunto de indicadores de riesgo de homicidio para la víctima de malos tratos.

PALABRAS CLAVE: *Homicidio doméstico, Perfil psicologógico, Violencia doméstica, Delit*

ABSTRACT

This paper intends to identify social, psychological and/or behavioural traits of domestic aggressors, who can put their victims' life in danger.

A sample of 46 males, 20 of them murderers and 26 non murderers, were interviewed on the basis of the PPDA –Psychological Profile of Domestic Aggressors. It was an ad hoc semi-structured interview consisting of the following dimensions: socio-demographic data, aggressor's family characteristics, couple relations, domestic violence, aggressor's motivation and post-aggression behaviour. According to literature, social, psychological and behavioural variables covered by these six dimensions generate, increase or maintain violent behaviour.

Data statistical analysis shows that variables distribute differently across the murderer and non murderer samples. A set of indicators of homicide risk of victims of domestic aggression was established.

KEY WORDS: *Domestic Homicide, Psychological Profile, Domestic Violence, Crime.*

INTRODUCCIÓN

La violencia domestica se define como cualquier acción, no accidental, por parte de un miembro de la familia que, desde una posición de poder y autoridad, provoca daños físicos y/o psicológicos a otro miembro de la misma familia. Las relaciones de violencia doméstica pueden establecerse, pues, entre un hombre y su pareja, entre padres e hijos, entre padres y abuelos y entre hermanos. En relación a la primera, marido-mujer, se centra el presente estudio.

esta misma causa dentro del estado español.

Hasta la actualidad, se han intentado definir las diferentes variables que dan lugar a un comportamiento violento hacia la pareja. Las variables más importantes a destacar son:

1. Variables sociodemográficas.
2. Características sociofamiliares del agresor
3. Relación de pareja.
4. Violencia doméstica.
5. Motivación del agresor.

distribuye significativamente diferente entre la población de maltratadores homicidas y los no homicidas.

1. VARIABLES SOCIODEMOGRÁFICAS

Existen diversos perfiles sociodemográficos obtenidos de encuestas sociológicas. Por ejemplo, Straus, Gelles y Steinmetz (1980), extrajo 20 características relacionadas con la violencia doméstica, entre las que cabe destacar: el marido se encuentra empleado o a media jornada o en paro, los ingresos familiares son inferiores a 6.000$, el marido es un obrero, tanto el marido como la mujer tienen menos de 30 años y existen altos niveles de estrés familiar e individual.

Otros estudios (Steinmetz, 1977, Gelles, 1974) muestran una relación negativa entre el nivel educativo y el maltrato infantil o a la mujer.

La diferencia de edad entre cónyuges, también puede ser una fuente de estrés, dado que a mayor diferencia de edad más probabilidad existe que aparezcan conflictos intergeneracionales y desequilibrio en la autoridad.

2. CARACTERÍSTICAS SOCIOFAMILIARES DEL AGRESOR

Los estudios sobre las características sociofamiliares del agresor, entendidas como las características de su familia de origen, muestran que la ruptura de la

ga, observó que la mayoría de homicidios domésticos procedían de familias rotas, con ausencia de la figura parental, y con una identificación negativa.

También en su primera investigación, Owen y Straus (1975), se sugiere por un lado que si la formación paterna adoptada es muy autoritaria, los castigos físicos se convierten en habitual. Y, por otro, que los maridos que habían visto pelearse a sus progenitores, eran 2,5 veces más propensos a comportarse de forma abusiva con su pareja actual. En esta misma línea apunta Berkowitz (1993) y, basándose en el principio de la transmisión intergeneracional de la violencia, afirma que las personas expuestas a la misma a lo largo de sus años de formación como persona tienden a mostrar las mismas inclinaciones agresivas de adultos.

3. RELACIÓN DE PAREJA

Dentro de la relación de pareja y, en cuanto a las relaciones anteriores, el hombre violento se caracteriza por un alto número de separaciones y una necesidad de buscar y conocer otras mujeres, todo ello indicador de una alta dependencia (Sonkin, Martin y Walker, 1985). También afirman que cuando cambian de pareja, la probabilidad de que la violencia se oriente hacia el nuevo cónyuge son muy elevadas. En esta línea, existe evidencia que entre el 44 y el 67% de los maltratadores han tenido relaciones violentas previas (Carlson, 1977; Coleman, 1980; Sonkin et al., 1985).

1967; Straus et al.,1980). Esta también parece aumentar cuando los hijos nos son deseados (Martin, 1976), difíciles (Martin, 1976; George y Main, 1979), prematuros (Martin, 1976; Elmer, 1967; Lynch, 1975) o la madre es adolescente (Oppel y Royston, 1971; Bolton, 1981).

Es frecuente que ambos cónyuges presenten una fuerte dependencia emocional hacia la otra persona. Según Walker (1986) en la mujer surge de al menos dos fuentes, por un lado relacionada con el estatus subordinado de la mujer en la sociedad y la familia, y por otro como consecuencia del estado psicológico por el trato abusivo reiterativo de su pareja, conocido como el Síndrome de la Mujer Maltratada. En lo que se refiere a la dependencia del hombre, ésta se halla relacionada con el bajo nivel de autoestima y la inseguridad (Dutton, 1995; Corsi, Dohme y Sotés, 1995; Currie, 1983).

En relación a las características externas de la relación actual, es típico en una situación de maltrato que el entorno social no conozca lo que ocurre en la privacidad del hogar, puesto que el maltratador de cara al exterior sigue los criterios normativos de la sociedad, pero cuando está a solas con su pareja no puede evitar que los accesos de ira acaben en violencia. Adams (1989) y Sonkin y Durphy (1982) hablan de esta personalidad dual, referida a la discrepancia entre el comportamiento en público y el comportamiento privado y Dutton (1995) de la personalidad de Dr. Jekyll y Mr. Hyde.

normas en la sociedad legitimadoras de la violencia hacia la mujer tal como afirma Straus (1980), es probable que las personas de su entorno no interfieran o incluso presionen para mantener la situación actual. Más si se tiene en cuenta que, según el mismo autor, el parentesco y la estructura peculiar familiar, provoca de por sí una privacidad en el hogar que aísla a sus miembros del control y asistencia externa.

El aislamiento social se encuentra relacionado de forma positiva con el maltrato marital (Finkelhor, 1983), el abuso sexual a la mujer (Rusell, 1982), y el abuso y maltrato infantil (Allan, 1978; Finkelhor, 1979, 1983, 1984, Rusell, 1982).

4.VIOLENCIA DOMÉSTICA

La primera característica se refiere a la relación entre el inicio de la relación y la aparición de violencia. Ésta, normalmente empieza de forma muy temprana, incluso de novios, y tiene una duración muy larga, 12 años de media, según Echeburúa (1998).

La socióloga Ann Goetting (1989) analizó en Detroit que las 2/3 partes de las mujeres asesinas por sus parejas, éstas habían sido arrestadas al menos 1 vez. Sin embargo, en Málaga (1984-1994) se detecta lo contrario, escasas detenciones (Cerezo, 1988).

El perfil de la agresión viene definido por la escena del crimen, los tipos de

La primera coincidiría con una persona controlada y una planificación del acto violento y la segunda con una persona con escaso control y un acto impulsivo y caótico. Sería esperable, según el tipo de maltratador, encontrar escenas del crimen diferenciadas.

La víctima puede ser agredida física, sexual y psicológicamente. El agresor organizado (Dutton, 1995), caracterizado por la planificación y el control, agredirá a las víctimas en zonas ocultas socialmente, mientras que el desorganizado dado que inicia ciclos de violencia de forma no prevista, puede llegar a agredir en zonas bien visibles.

Finalmente, la percepción del agresor de la causa de la agresión y un posible homicidio puede ser diversa pero en general con tendencia a la atribución externa de responsabilidad como mecanismo de autoprotección (Dutton, 1995)

5. MOTIVACIÓN DEL AGRESOR

En primer lugar, categorizar al agresor como frío o cálido hace referencia a la motivación con que emprende una interacción, como se presenta ante la gente. En relación a esto, Dutton (1995) definió 3 perfiles básicos de maltratador:

– Agresor psicopático: Caracterizado por un patrón de desconsideración extrema hacia las normas sociales, con antecedentes delictivos, falta de remordimientos y con reacciones emocionales superficiales. Su un perfil de evitación y agresión pasiva, hasta que la ira aparece como resultado de la acumulación progresiva de frustraciones. Son grandes maltratadores emocionales.

– Agresor cíclico/emocionalmente inestable: Tienen una incapacidad para describir sus sentimientos y un gran temor a la intimidad y al abandono. No pueden parar la agresión hasta que la ira y los celos acumulados se han descargado.

En relación al nivel de sensibilidad ante el rechazo de la víctima después del episodio violento, creemos que este será bajo para el agresor psicopático y en el otro extremo se situaría el agresor cíclico.

Otra característica de la personalidad del agresor es que, en general, no tendrá un autoconcepto de persona agresiva, pues no aceptará los actos cometidos como una forma de protección. Por esta misma razón, Dutton (1995) afirma que el agresor suele utilizar mecanismos de defensa en la argumentación de los hechos (racionalización, negación, proyección, justificación, represión y minimización). Existe también abundante literatura referente a la baja autoestima del maltratador (Steel y Pollack, 1974; Walker, 1984; Goldstein y Rosenbaum, 1985). Sobre este tema, existe evidencia que los maltratadores experimentan altos niveles de infelicidad e insatisfacción (Hotaling y Sugarman, 1986).

En relación a los desencadenantes de

se basa por un lado en la evidencia de que alrededor del 50% de ellos tienen un historial previo de violencia hacia una pareja anterior (Carlson, 1977; Coleman., 1980; Sonkin et al., 1985) y, por otro, que han sido arrestados por otros crímenes violentos. En un estudio de Bernard y Bernard (1984), a través del MMPI, muestra que los agresores poseen un pobre control de los impulsos. Resultados semejantes se obtuvieron en el estudio de Hudak y Bailey (2001). Sin embargo, existen autores que no están de acuerdo en atribuir una falta de control en los maltratadores, puesto que los agresores dirigen la mayoría de sus ataques hacia sus parejas más que a otras personas (Bograd, 1988), algunas veces levantan a sus víctimas de la cama para golpearlas (Pagelow, 1981; Shainess, 1977); cuando agreden, los maltratadores apuntan donde el golpe no se verá y, suelen parar antes de matar a sus víctimas (Sonkin et al., 1985).

Se considera importante conocer si el agresor utiliza algún tipo de estimulación de tipo violenta o sexual-violenta, pues haría más probable el uso de la violencia en la vida real. Este supuesto parte de la teoría de la cultura de la violencia, según la cual diversos autores (Stark y Mc Envoy, 1970; Gil, 1970; Huggins y Straus, 1980) consideran que dentro de nuestra sociedad existe una cultura centralizada en la fuerza y la violencia, hecho que legitima, inspira y refuerza el uso de la violencia dentro de la familia.

Diversos son los trastornos psicológicos que, según diversos autores, pueden

delirio más frecuente el celotípico (Dutton, 1995, Coleman., 1980; Roy, 1982; Walker, 1979), la depresión (Hammond y Carole, 1997), el trastorno antisocial, paranoico y narcisista (Echeburua, 1994) y el trastorno límite de la personalidad (Dutton, 1995).

6. POSTAGRESIÓN

Dentro del contexto postagresivo cabe destacar la existencia de una reacción suicida después de éste. Así, Cerezo (1988) destaca que más del 30% de los homicidas de su estudio en Málaga, intentaba el suicidio después de su acto criminal. También puede ser resultado no tanto del acto violento, sino por la ruptura de la relación, como muestra el estudio de Conner, Duberstein y Conwell (2000). Los resultados de un grupo de 42 sujetos alcohólicos a los que la autopsia psicológica reveló que la mitad de ellos tenían historias de violencia doméstica, mostraron que era más probable que estuvieran separados de su pareja en el momento del suicidio.

Es importante conocer el comportamiento genérico del agresor, en concreto si ejerce algún tipo de acción sobre las pruebas, el tipo de comportamiento hacia su mujer y el grado de aceptación policial de los hechos, con la finalidad de conocer si los mecanismos de defensa se han puesto en marcha.

La relación entre el acoso, violencia doméstica y homicidio no está muy clara en los estudios científicos. Así, por un

(APA, 1996). Por el contrario, las mujeres muertas como consecuencia del acoso se sitúan ligeramente por debajo del 2% (Meloy, 1996).

Meloy (1996) identifica 4 tipos de acosadores: obsesivo simple, amante obsesivo, erotómano y el síndrome de falsa victimización, siendo el primero el más peligroso.

INSTRUMENTO

El PPAD (Perfil Psicológico del Agresor Doméstico), entrevista semiestructurada, dividida en 6 grandes bloques (el primero no contabilizado por constituir meros datos identificativos del sujeto) se elaboró a través de la información obtenida de los estudios sobre la violencia doméstica, la extraída de los perfiles criminales de homicidas domésticos planificados y no planificados, así como de las investigaciones sobre la predicción del comportamiento violento.

Cada uno de dichos bloques está compuesto por diferentes preguntas, agrupadas en las siguientes variables :

0. **Datos identificativos :** Constituido por: la fecha de la entrevista, centro penitenciario, identificación del sujeto (nº de sujeto), grupo de adscripción, existencia de violencia doméstica, perspectivas de futuro del comportamiento violento, escala de sinceridad 1 (valoración del entrevistador), escala de sinceridad 2 (...

ye 8 variables: edad de la víctima y del agresor, diferencia de edad entre los dos, nivel académico, estatus social, nivel intelectual, tipo de vínculo laboral y situación laboral.

2. **Características sociofamiliares del agresor:** Las variables de este bloque se hallan recogidas en 3 subapartados: Características estructurales de la familia, Características internas de la familia y Experiencias personales del agresor vividas durante la infancia y adolescencia.

3. **Relación de pareja:** Las variables de este bloque se hallan agrupadas a su vez en 3 subapartados: Características de las relaciones anteriores, Características internas de la relación actual y Características externas de la relación actual.

4. **Violencia doméstica:** Las variables de este bloque se agruparon en 2 subapartados: Características generales y Perfil de la agresión.

5. **Motivación del agresor:** Las variables de este bloque se estructuran en 2 subapartados: *Personalidad del agresor y Desencadenantes de la agresión*.

6. **Comportamiento post-agresivo:** Dividido en 3 subapartados: Contexto post-agresivo, Comportamiento criminal genérico del agresor y Acoso.

Asimismo, de cada variable se elaboraron y categorizaron las posibles respuestas que podían dar los sujetos, con lo que obtuvimos una **hoja de registro**, donde anotar de forma sistemática durante la entrevista, las respuestas de los agresores a los diferentes ítems.

MUESTRA

En relación a los sujetos, la muestra quedó constituida por 46 hombres que se hallaban en algún Centro Penitenciario del ámbito catalán, sentenciados o en estado preventivo, por causas relacionadas con el homicidio conyugal y/o violencia doméstica.

La edad media de la muestra fue de 40 años.

PROCEDIMIENTO

Las entrevistas fueron administradas en los Centros Penitenciarios de Girona, Figueres, Quatre Camins, Joves de Barcelona, Brians, Ponent y Homes de Barcelona, entre los meses de Abril de 1999 y Junio de 2001.

Con el fin de localizar, de entre toda la población penitenciaria, aquellos sujetos susceptibles de formar parte de la muestra, se revisaron los informes penitenciarios o sentencias.

Los criterios de inclusión para formar parte de la muestra y la posterior asignación de un sujeto en cada uno de los

relación íntima entre el agresor y su víctima (p.e. relación de amigos, parientes o desconocidos), así como la negativa del agresor a hacer o concluir la entrevista.

Una vez revisados los expedientes de los sujetos que cumplían los requisitos de inclusión para participar en el estudio, se procedía a su localización dentro del centro. Se exponía el planteamiento y objetivo del estudio, y las condiciones de confidencialidad que garantizaban el anonimato del entrevistado. Si aceptaba a colaborar, se pasaba a administrar el PPAD, en una entrevista personal semi-estructurada con duración aproximada de 4 horas.

De las 59 personas localizadas, 13 no quisieron/ pudieron ser entrevistadas, por lo que la muestra definitiva quedó formada por 46 sujetos. De todos ellos, 20 fueron clasificados dentro de la categoría homicida y 26 dentro de la categoría no homicida.

RESULTADOS

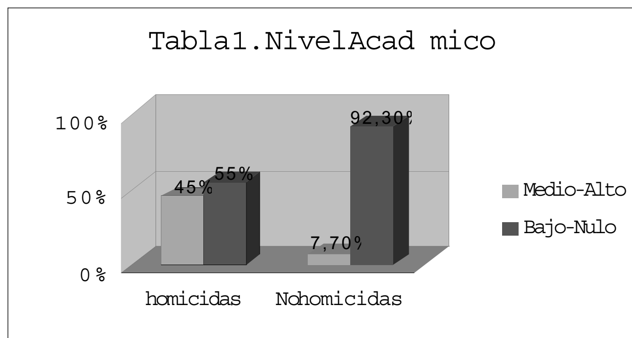
Una vez administrado a toda la muestra el PPAD y, obtenidas las correspondientes hojas de registro, se procedió al análisis estadístico de los datos, a través de los programas informáticos EXCEL y SPSS.

0. Datos identificativos

De este apartado cabe destacar la

1. Datos sociodemográficos

El grupo homicida presenta unos niveles académicos (tabla 1) (P<0,01, $\chi2$= 8,64, gl=1), de estatus social (P<0,05, $\chi2$= 5,34, gl=1) e intelectuales (P=0,05, $\chi2$=8,06, gl=1) superiores de forma significativa a los del grupo no homicida.



En el resto de variables sociodemográficas no se han obtenido diferencias significativas entre los grupos, excepto una tendencia a la estabilidad temporal en el grupo homicida (P=0,09, $\chi2$= 2,8, gl=1) en cuanto a la variable "situación laboral".

2. Características sociofamiliares del agresor

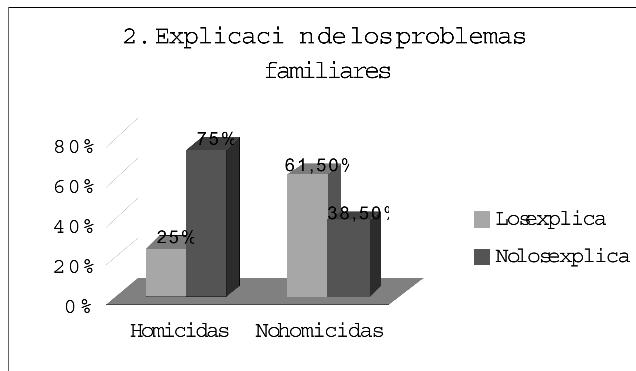
Aunque ninguna de las variables de este bloque se ha podido constituir como diferenciadora de los grupos homicidas y no homicidas, si se han podido observar la existencia de tendencias estadísticas en alguna de ellas.

Dentro las características internas de la familia de origen, los homicidas describen una mayor estabilidad de residencia y una mayor relación negativa con la figura paterna.

Finalmente, como experiencias vividas durante la infancia-adolescencia, ambos grupos afirman haber tenido problemas con la justicia. Sin embargo, muestran un perfil de conductas desviadas diferentes. El grupo no homicida mayoritariamente afirma haber agredido físicamente a padres o familiares, haber sido cruel con personas y/o animales y destruido propiedad. Contrariamente, el grupo no homicida muestra más conductas de autoaislamiento y huidas del domicilio.

3. Relación de pareja

El grupo homicida muestra una tendencia estadística a sostener más relaciones anteriores que el no homicida (P=0,08, $\chi2$=3, gl=1). El resto de varia-

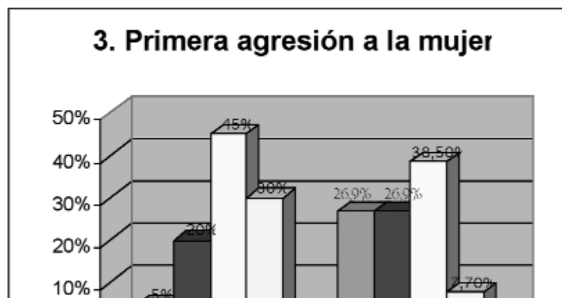


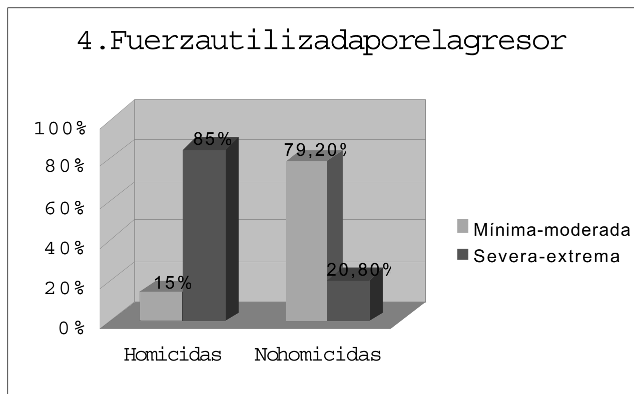
Lo mismo se puede afirmar en relación a las características internas de la relación actual. Solo dos variables muestran una tendencia estadística. La primera, el tipo de relación establecida, donde se destaca que el grupo homicida acepta tener relaciones íntimas sin llegar a convivir. Y la segunda, la dependencia emocional de la víctima, que muestra un mayor nivel de dependencia las parejas del grupo no homicida.

Dentro del subapartado de las características externas de la relación, encontramos diferencias significativas en cuanto a que, por un lado, el agresor homicida explica menos la situación que se vive en casa (tabla 2) ($P=0,01$, $\chi2=6,08$, $gl=1$) y, por otro, la familia-amigos de los homicidas tienden a mantener el estatus quo, mientras que la reacción de la familia-amigos de los no homicidas se centra más en rechazar la situación o a inhibirse ($P= 0,01$, $\chi2= 6,42$, $gl=1$).

4. Violencia doméstica

De este bloque cabe destacar, en primer lugar, que la primera agresión ejercida contra la mujer se produce al poco tiempo de iniciada la relación, en el caso del grupo no homicida, mientras que en el grupo homicida se consuma entre el primer y quinto año después de casados (tabla 3).





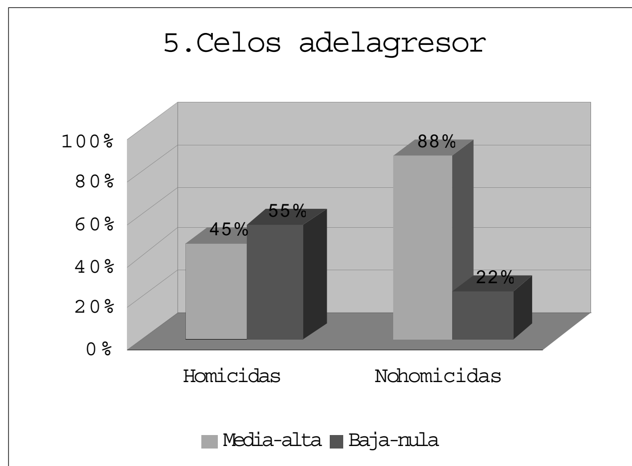
En segundo lugar, el grupo no homicida tiene una mayor tasa de denuncia (44 vs. 24), la situación de maltrato se prolonga más en el tiempo (108,5 vs. 24 meses) y se concentra por la noche (61,2%), mientras que en relación a esta variable el grupo homicida es indiferenciada (71,5%).

En tercer lugar, el perfil de la agresión presenta muchos rasgos comunes entre los dos grupos (el lugar habitual de la agresión es su casa, ésta queda desorganizada, aparece violencia física, pero no sexual ni contra los hijos, ésta es visible socialmente y no existen intentos previos de homicidio ni pensamientos de autocontrol). Las diferencias aparecen cuando se analiza la parte del cuerpo agredida, con una tendencia significativa del grupo homicida a agredir el tronco-torso frente a la cara en el grupo no homicida. El grupo homicida, también destaca por una fuerza extrema mientras que el grupo no homicida se sitúa en el otro extremo (tabla 4) ($P<0,001$, $\chi 2=17,9$, gl=1), aunque es este último grupo el

La percepción de riesgo de muerte de la víctima en el momento de la agresión era elevada en el grupo homicida ($P=0,001$, $\chi 2= 13,6$, gl=1), mientras que los condicionantes referentes al riesgo de muerte de la víctima eran, para el grupo homicida la percepción continuada e irresoluble de conflictos, y para el grupo no homicida lo constituía el engaño ($P<0,005$). Finalmente, la capacidad de autocontrol es baja en el grupo homicida y medio-alta en el no homicida ($P<0,05$, $\chi 2=4,36$, gl=1).

5. Motivación del agresor

La personalidad de ambos tipos de agresores muestran mucha similitud: ambos muestran una alta sensibilidad ante el rechazo de la víctima, no se conceptualizan como personas agresivas, responsabilizan a la mujer o otros factores exógenos la causa de la agresión y tienen un nivel de autoestima bajo. En este apartado la única diferencia significativa entre los grupos la constituye el



En relación a los desencadenantes de la agresión, cabe referir en primer lugar una ligera diferencia entre los grupos respecto la relación entre personalidad y control de las emociones, tendiendo los homicidas a ser más supercontrolados y los no homicidas más impulsivos. Por otro lado, los homicidas presentan una mayor tasa de psicopatología (P>0,05), especialmente depresión (36,4%), mientras que en el caso de los no homicidas es el abuso de sustancias (60%), presentando estos además un mayor nivel de celos (tabla 5)(45% vs. 88%) (P<0,05).

Los deseos sobre la familia, son en ambos casos incompletos, pero por diferentes motivos. Para el grupo no homicida es la posesión de la mujer y para el homicida el ideal de mujer no conseguido.

6. Post-agresión

(35,6%) de forma aislada (50%) y grave (75%) dentro del grupo homicida.

El comportamiento criminal genérico del agresor presenta diferencias significativas entre los grupos en la variable referente a la aceptación judicial/ policial de los hechos, siendo el grupo homicida el que muestra una mayor aceptación (85%).

Para finalizar y, en relación al acoso se puede afirmar la existencia de una aproximación sorpresiva en los homicidas (71,4%) mientras que la impositiva solo aparece en los no homicidas. La forma del acoso presenta una mayor intensidad y extensión en los no homicidas.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en el presente estudio muestran la existencia de un

cida, pudiéndose así establecer un perfil psicosocial diferencial para cada uno de los grupos.

Las primeras variables que parecen diferenciar al maltratador doméstico homicida del no homicida son el **nivel académico**, el **nivel intelectual** y el **estatus social**, que se sitúan para el maltratador homicida en un nivel medio/alto y bajo para el no homicida. Estos resultados en el grupo homicida no coinciden con el perfil genérico del agresor, en el que se considera estas variables como recursos para hacer frente al estrés y reducir la posibilidad de aparición de violencia doméstica (Steinmetz, 1977; Gelles, 1974). Asimismo, se contradice con el estudio de Bensing y Schroeder (1960) se observa que los homicidios producidos en Cleveland, se relacionan con las áreas urbanas caracterizas por bajos ingresos económicos, niveles educativos, trabajos de baja escala laboral así como hogares descontrolados y sobrecargados. Goething (1989) confirma que más del 50% de los homicidas domésticos tienen un estatus social bajo. Similares resultados son los encontrados en Málaga (Cerezo, 1988).

Finalmente, en un estudio de Gil (1970), el 48% de un grupo de maltratadores afirmaba haber experimentado el paro durante el año anterior al maltrato.

Una posible explicación de este hecho puede residir en que la causa del maltrato-homicidio doméstico en el caso del grupo homicida no es causado por unas condiciones económicas o intelectuales

Por otro lado, Mc Call y Shields (1986), afirma que la relación entre estrés e ingresos y el efecto en la violencia doméstica es crítica, por ejemplo el estudio de Straus et al.(1980) donde se encontró que el aumento de estrés, no tenía efecto en los muy pobres (ingresos inferiores a 6.000$) o por encima de los 20.000$, aunque aumentaba la probabilidad de maltrato infantil en el grupo de ingresos medio.

Las siguientes variables que configuran el perfil del maltratador homicida son la **no comunicación de la agresión al entorno familiar** y **el mantenimiento por parte de la familia del agresor del estatus quo familiar**. Es posible que el maltratador homicida, con ayuda de su familia y gracias a unos mayores recursos educativos e intelectuales con respecto al no homicida pudiera resguardar mejor la apariencia de "buena familia". También, ayudarían a esta apariencia las siguientes 2 variables, pues cuando más tarde aparezcan en el tiempo las agresiones y con menor frecuencia, mayor es la probabilidad que el entorno de la pareja no conozca los hechos, contrariamente a lo que le pasa al grupo no homicida.

La **aparición tardía (1-5 años de casados) de la primera agresión a la pareja** como rasgo del maltratador homicida junto con una **baja frecuencia de agresiones** son variables que no coinciden con diversos estudios sobre violencia doméstica. Echeburúa informa que el perfil medio de 164 víctimas mostraba una situación de violencia desde

maltrato desde hace 11 años y más. Por otro lado, Dutton (1995) indica que los indicadores de un posible homicidio son: repetidas peleas y maltratos, separaciones y reconciliaciones, antecedentes de depresión, uso indebido de drogas y celosía morbosa.

Una explicación de estos resultados se podría encontrar en el hecho de que al aparecer de forma tardía la primera agresión, el espacio de tiempo entre ésta y la muerte/intento de homicidio de la víctima no sea suficiente para que exista una escalada de violencia tal que halla hecho aumentar la frecuencia de las agresiones.

La siguiente variable diferenciadora entre los homicidas domésticos y los no homicidas es la **zona del cuerpo donde va dirigida la agresión**, siendo el tronco y la cara, respectivamente. En el primer caso la intención finalista es matar, en el segundo humillar. También se les podría atribuir a los homicidas domésticos un mayor control sobre su conducta, puesto que la zona de la agresión, el tronco, es una zona no visible socialmente, que permite seguir dando la imagen de buena familia comentada anteriormente.

Enlazada con la anterior variable, las siguientes, **utilización de una fuerza física extrema** y **riesgo de muerte más elevado**, es otra muestra de la finalidad del agresor, puesto que ejercen una fuerza desmesurada si el único objetivo fuera someter a la víctima.

La **Percepción del agresor de un**

gias de resolución de conflictos y la existencia de fuentes de estrés. En un estudio de Vivian y Malone (1997) en el que se dividió a las parejas en tres grupos en función de la gravedad de la agresión, medido mediante *The Conflict Tactics Scale*, los resultados mostraron que la calidad marital, el estilo de resolución de conflictos, las cogniciones respecto al matrimonio y el estado anímico individual eran más negativos para ambos esposos en aquellas parejas cuyos esposos eran más agresivos. Asimismo, en un estudio realizado en Chile por Martinez, Raul y Millar (2000), en el que se compara un grupo de agresores domésticos con un grupo de no agresores, muestra como el primer grupo se caracterizaba por una mayor percepción de provocación por parte de sus mujeres, mayor intensidad de experiencias de rabia, mayor variedad de interacciones negativas (reacciones hostiles verbales y no verbales), menor ajuste diádico global y menor satisfacción marital. Finalmente, sobre este tema, existe evidencia que los maltratadores experimentan altos niveles de infelicidad e insatisfacción en sus vidas, tanto en casa como en el trabajo (Hotaling y Sugarman, 1986).

Los maltratadores homicidas de este estudio también se caracterizan por una **baja capacidad de autocontrol durante la agresión**, comparados con los no homicidas. Se podría afirmar que los maltratadores homicidas de nuestro estudio tienen cierta capacidad de control sobre su conducta (puesto que apuntan al tronco de la víctima) pero que en cierto momento durante la agresión

una justificación para la **racionalización** de su acto criminal (mecanismo de defensa más utilizado por los sujetos homicidas), puesto que si la comisión de la agresión está causada por un factor externo a ellos, como puede ser el alcohol o conflictos familiares, quedan eximidos de toda culpabilidad. En el caso de los no homicidas el mecanismo defensivo más utilizado es la minimización, que consiste en argumentar que el daño causado no ha sido tan grave, alternativa difícilmente utilizable para el que ha matado a su mujer. Dada la gravedad de los hechos, los sujetos homicidas tienden a **aceptar policial y/o judicialmente los hechos**, puesto que la gravedad de estos les impide utilizar otro mecanismo de defensa (minimización, negación) que no sea la racionalización para reencontrar su equilibrio psicológico. Por ello también suele aparecer en este grupo **reacciones suicidas**, de forma aislada y grave. Esto puede ser causado por un sentido de pérdida de su propia realidad cuando se pierde el objeto deseado. En consonancia con esta hipótesis se encuentra el estudio de Conner et al. (2000).

Los sujetos homicidas muestran **depresión** como principal psicopatología mientras que los no homicidas el abuso de sustancia. Ambas psicopatologías han estado relacionadas con los maltratadores domésticos. Así, por ejemplo, en el estudio de Hoething (2001) las variables celos, autoestima y abuso del alcohol se correlacionaban con la severidad del abuso. Cano y Vivian (2001) encontraron una relación directa entre estresores y violencia doméstica y una

estudio de Hammond y Carole (1997) las tres variables estudiadas (depresión, autoestima y asertividad) quedaron relacionadas con la violencia doméstica. Altos niveles de hostilidad y depresión en un grupo de golpeadores fue descrito por Sonkin et al.(1985).En el caso que nos ocupa, la diferencia encontrada en ambos grupos en cuanto a la psicopatología predominante, puede ser entendida, en el caso de la depresión en el grupo homicida y, según la descripción hecha por los sujetos, como una reacción previa al acto criminal, ante la incapacidad de solucionar problemas y, al mismo tiempo, posterior a su comisión. En el caso del consumo de drogas, su función puede ser reforzar la comisión de los actos agresivos, sin el correlato emocional que comporta si uno se siente responsable. Según Gondolf (1988) los hombres beben cuando quieren agredir, para evitar la responsabilidad personal de su comportamiento.

Por otro lado, el grupo no homicida presenta un nivel más elevado de **celos** en comparación con el grupo homicida. Este resultado, en apariencia contradictorio, puede ser explicado en parte por los resultados obtenidos en los condicionantes de riesgo de muerte de la víctima, verbalizadas por los sujetos: en el grupo homicida constituido por la percepción de un conflicto irresoluble en la familia y en el grupo no homicida por el engaño. En un estudio de Barnett, Martínez y Bluestein (1995) en que la celosía no estaba ser el principal precipitante de la violencia, concluían que podía interactuar con otras variables, como la depen-

apuntan hacia una tipología de agresor para cada uno de los grupos: los individuos del grupo homicida pertenecerían a los agresores hipercontrolados (relevancia de variables emocionales sobre las económicas, existencia de depresión, sensación de un conflicto irresoluble en la pareja, baja capacidad de autocontrol, baja frecuencia de las agresiones) y los del grupo no homicida a los agresores cíclicos (influencia de factores estresantes, abuso de sustancia, gran temor a la intimidad y al abandono, celos y mayor frecuencia de agresiones). Esta tipología constituye una evidencia observable sólo a nivel descriptivo en la presente investigación, por lo que serán necesarios otros estudios para poder corroborar a nivel estadístico esta tendencia.

En relación a los resultados de este estudio, estos parecen indicar importantes diferencias psicosociales entre los sujetos violentos homicidas y no homicidas. Consideramos necesarias un mayor número de investigaciones en esta dirección para poder determinar si realmente existe un perfil diferencial entre ambos grupos. En especial los problemas relacionados con la muestra y su representatividad. En el grupo no homicida, donde la población presidiaria sólo representa una pequeña proporción de la población general (sólo un 10% son denunciados y una proporción de los mismos ingresan en prisión). Sin embargo, para el grupo homicida el problema reside en el alto riesgo de suicidio que presenta esta población.

Por otro lado, para comprobar que los resultados se mantienen en el tiempo, en el sentido que los individuos del grupo no homicida siguen perteneciendo a este grupo, es decir, que no han cometido homicidio, sería necesario hacer un estudio longitudinal utilizando el mismo instrumento de medida.

REFERENCIAS

Adams, David (1989). Identifying the assaultive husband in court: You be the judge. *Boston Bar Journal 33(4), 23-25.*

Allan, J. (1978). Serial drawing: A therapeutic approach with young children. *Canadian Counselor, 12(4), 223-228.*

Barnett, O.W., Martinez, T.E. y Bluestein, B.W. (1995). Jealousy and romantic attachment in maritally violent and nonviolent men. *Journal of Interpersonal violence, 10(4), 473-486.*

Berkowitz, L. (1993). *Aggression: its causes, consequences and control*. New York: McGraw-Hill

Bernard, J.L., y Bernard, M.L. (1984). The abusive male seeking treatment: Jeckill and Hyde. *Family relations, 33, 543-547.*

Bograd, M. (1988). Feminist perspectives on wife abuse: an introduction". En K. Yllo y M. Bograd (Eds.), *Feminist Perspectives on Wife Abuse (11-27).* Beverly Hills, CA: Sage.

Bolton, F. (1981). *The pregnant adolescent.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Bowlby, J. (1984). Violence in the family disorder of the attachment and caregiving systems. *The American Journal of Psychoanalysis,* 44, 9-27.

Cano, A., Vivian, D. (2001). Life stressors and husband to wife violence. *Aggression and violent behaviour. Sep-Oct, 6(5), 459-480.*

Carlson, B.E. (1977). Batered women and their assailants. *Social Casework,* 22, 455-460.

Cerezo, A. (1988). *La relación entre malos tratos domésticos y homicidios entre parejas. Tratamiento criminológico.* Málaga. Universidad de Málaga.

Coleman, K.H. (1980). Conjugal Violence: What 33 Men Report. *Journal of Marital Family Therapy,* 6, 207-213.

Corsi, J., Dohmen M. L., Sotés M. A. 1995.*Violen-*

in young men with early onset al.coholism: Reanalyses of Murphy's data. Suicide and life threatening behaviour, 30(4), 345-359. Guilford Publications.

Currie, D.W. (1983). A Toronto model. *Social work with groups,* 6, 179-188.

Dutton, D.G. (1995). *The batterer: a psychological profile.* New York. Basic Books.

Echeburúa, E. (1994). *Personalidades violentas.* Madrid. Pirámide.

Elmer, E. (1967). *Children in jeopardy: a study of abused minors and their families.* Pittsburgh: University of Pittsburgh press.

Finkelhor, D. (1979). *Sexually victimized children.* New York: Free Press.

Finkelhor, David. (1983). *The Dark Side of Families: Current Family Violence Research*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Finkelhor, D. (1984). *Child Sexual Abuse.* New York: Free Press.

George, C. y Main, M. (1979). Social interactions of young abused children: Approach, avoidance, and aggression. *Child development, 50, 308-318.*

Goetting, A. (1989). Men who Kill their Mates: A Profile. *Journal of Family Violence* ,4, 285_296.

Gelles, R.J. (1974). *The violent home.* Beverly Hills, CA. Sage.

Gil, D. G. (1970). *Violence against Children: Physical Abuse in the United States.* Cambridge, Mass.:Harvard University Press.

Goldstein y Rosenbaum, (1985). An evaluation of the self-steem of maritally violent men. *Family relations, 34, 457-471.*

Gondolf, E.W. (1988). The effect of batterer counseling on shelter outcome. *Journal of Inter-*

Hotaling y Sugarman, (1986). An analysis of risk makers in husband to wife violence: The current state of knowledge. *Violence and victims, 1, 101-124.*

Hudak, K., y Bailey V. (2001). An investigation of variables related to attrition of Hispanic men from a domestic violence treatment program. *Dissertation Abstracts International. Section b: The Sciences and Engineering. 2001 Jun, 61(11-B), 6137.*

Huggins, M.D. & Straus, M.A. (1980). Violence and the social structure as reflected in children's books from 1850 to 1970. En M.A. Straus & G.T. Hokling (Eds). *The social causes of husband-wife violence (capítulo 4).* Minneapolis: MI Univ. Minnesota press.

Lynch, M. (1975). Ill-Health and child abuse. *Lancet, 2, 317-319.*

Martin, H. (1976). *The abused child: a multidisciplinary approach to developmental issues and treatment.* Cambridge, MA: Ballinger Publishing Co.

Martinez, M., Raul, E., y Millar. F, (2000). Variables psicológicas y culturales asociadas a la violencia conyugal masculina. *Revista intercontinental de psicoanálisis contemporaneo.2000 Jul-Dec, 2(2), 8-20. México: Universidad Intercontinental.*

Mc Call, G., Shields, N.M., (1986). Social and structural factors in family violence. En M. Lystad (Ed.), Violence in the home: Interdisciplinary perspectives (98-123). New York: Brunner/Mazel.

Oppel, W., y Royston, A. (1971). Teenage births: Some social, psychological, and physical sequelae. *American journal of public health, 61, 751-756.*

Owens, D. M.,. Straus, M. A. (1975). The Social Structure of Violence in Childhood and Approval of Violence as an Adult. *Aggressive Behavior l,193-211.*

Pagelow, M. (1981). Factors affecting women's decisions to leave violent relationships. *Journal of Family Issues, 2(4), 391-414.*

Rojas marcos, L. (1995). *Las semillas de la violencia*, Madrid: Espasa Calpe.

Roy, M. (1982). The abusive partner. New York: Van Nostrand Reinhold.

Rusell, D.E. (1982). *Rape in marriage.* New York: Macmillan.

Shainess, N. (1977). Psychosocial aspects of wife battering. En E. Roy (Eds.) *Battered women: a pychosocial study of domestic violence (111-119).* New York: Van Nostrand Reinhold.

Sonkin, D., y Durphy, M. (1982). *Learning to live without violence.* San Francisco: Volcano press.

Sonkin, D., Martin, D. y Walker, L. (1985). *The male battered.* New York: Springer.

Stark, R., i J. McEvoy III. (1970). Middle Class Violence. *Psychology Today,* 4, 52-65.

Steel, B. F. y Pollack, C. (1974). A psychiatric study of parents who abuse infants and small children. En R. Helfer y C. Kempe (Eds). *The battered child (89-133).* Chicago: Chicago univ. press.

Steinmetz, S.K. (1977). *The Cycle of Violence.* New York: Praeger.

Straus, M.A. (1980). The Marriage License as a Hitting License: Evidence from Popular Culture, Law, and Social Science. En M.A. Straus y G.T. Hotaling (Eds.), *The Social Causes of Husband Wife Violence (39-50)*. Minneapolis,MN: University of Minnesota Press.

Straus, M.A., Gelles, R, y Steinmetz, S. (1980). *Behind the closed doors.* New York: Doubleday.

Vivian, D, y Malone, J. (1997). Relationship factors and depressive symptomatology associated with mild and severe husband-to-wife physical agression. *Violence and Victims. 1997.Spr; 12(1), 3-18.* US: Springer Publishing Co.

Walker, L.E. (1979). *The battered woman.* New York: Harper & Row.

Walker, L.E. (1984). *The battered woman syndrome.* New York: Springer.